

Diskret holomorphe Funktionen und deren Bedeutung bei der Lösung von Differenzengleichungen

Habilitationsschrift

vorgelegt am 10. November 2017

der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

von

Prof. Dr. rer. nat. Angela Hommel

geb. am 01.07.1965 in Herrnhut

Gutachter:

1. Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Gürlebeck
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. W. Sprößig

Wissenschaftlicher Vortrag mit Kolloquium am 28. Juni 2018

Erteilung der Habilitation am

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Diskret holomorphe Funktionen	13
2.1	Einleitung	13
2.2	Diskrete Cauchy-Riemann-Operatoren und die Berechnung des diskreten Cauchy-Kerns	14
2.2.1	Der kontinuierliche Fall als Ausgangspunkt	14
2.2.2	Diskrete Theorie	15
2.2.3	Die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Fundamentallösung	19
2.2.4	Konvergenz im Raum l_p	22
2.2.5	Konvergenz im Raum L_p	23
2.3	Rechtsinverser Operator und die diskrete Borel-Pompeiu-Formel	28
2.3.1	Konstruktion eines rechtsinversen Operators	29
2.3.2	Konstruktion eines diskreten Cauchy-Integrals	32
2.3.3	Eigenschaften des Cauchy-Operators	45
2.4	Orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ und Beschränktheit des rechtsinversen Operators	50
2.4.1	Orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ auf der Basis der diskreten Cauchy-Riemann Operatoren	50
2.4.2	Die Beschränktheit des rechtsinversen Operators	53
2.5	Diskretes Kurvenintegral	56
2.6	Elementare diskret holomorphe Funktionen	57
2.6.1	Diskrete Polynome und die Appell-Eigenschaft	58
2.5.2	Diskrete Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen	64
3	Lösung von Differenzgleichungen mit Hilfe diskret holomorpher Funktionen	71
3.1	Einführung	71
3.2	Gleichungen erster Ordnung	72
3.2.1	Diskrete Vekuagleichungen	72
3.2.1.1	Vorbemerkungen	72
3.2.1.2	Vekuagleichungen in der klassischen Theorie	73
3.2.1.3	Das homogene diskrete Problem im allgemeinen Fall	74
3.2.1.4	Homogene diskrete Gleichungen im Fall $b_1 = b_2 = 0$	75
3.2.1.5	Konvergenz der diskreten Lösung im Fall $b_1 = b_2 = 0$	88
3.2.1.6	Homogene diskrete Gleichungen im Fall $a_1 = a_2 = 0$	92
3.2.1.7	Inhomogene Vekuagleichungen	93
3.2.1.8	Vekuagleichungen im quaternionischen Fall	95
3.2.2	Diskrete Beltramigleichungen	98

3.3	Gleichungen zweiter und höherer Ordnung	110
3.3.1	Das diskrete Stokesproblem in der Ebene	110
3.3.2	Das diskrete Lamésystem	116
3.3.3	Die biharmonische Gleichung als Grundlage für den weiteren Ausbau der Theorie	121
3.3.4	Lösung der diskreten Schrödingergleichung mit einer Gleichung vom Riccatityp	129
3.3.5	Diskrete Navier-Stokes-Gleichungen	139
3.3.5.1	Potential- und Stromfunktionen	144
3.3.5.2	Numerische Resultate	148
4	Elementare Funktionen in der Quaternionenanalysis - Ein Ausblick auf die mögliche Erweiterung der Theorie	153
4.1	Hyperkomplexe Exponentialfunktion	154
4.1.1	Problemstellung und historische Einordnung	154
4.1.2	Konstruktion einer Exponentialfunktion im \mathbb{R}^3	158
4.1.3	Eine Exponentialfunktion vom \mathbb{R}^4 in den \mathbb{R}^4	161
4.1.4	Der allgemeine Fall mit $n + 1$ Variablen für $n > 3$	163
4.2	Sinus- und Cosinusfunktion im höherdimensionalen Fall	165
4.3	Anwendung der Exponentialfunktion und eine hyperkomplexe Fouriertransformation	171
4.3.1	Zusammenfassung der Resultate im komplexen Fall	172
4.3.2	Fourierreihen im quaternionischen Fall, die auf dem Produkt $m \cdot \bar{x}$ beruhen	173
4.3.3	Eigenschaften der Fourierkoeffizienten	175
4.3.4	Fourierreihen für periodische monogene Funktionen basierend auf der Multiplikation von x mit dem skalaren Faktor m_0	179
4.3.4.1	Die Besselsche Ungleichung	182
4.3.5	Fourierreihen für periodische aber im allgemeinen nicht monogene Funktionen	184
4.3.5.1	Eine heuristische Methode zur Einführung der Fouriertransformation	186
4.3.5.2	Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Integrale	188
	Literaturverzeichnis	

Kapitel 1

Einführung

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine Einführung in die Theorie und eine Einordnung der Problematik in Bezug auf bereits bekannte Resultate.

Schon seit langer Zeit werden komplexe Methoden zur Lösung elliptischer Randwertprobleme genutzt. Die praktische Umsetzung der Methoden erfordert jedoch numerische Verfahren, die das Verhalten im kontinuierlichen Fall sehr genau widerspiegeln. Aus diesem Grund spielen diskret holomorphe Funktionen und somit auch diskrete Cauchy-Riemann-Operatoren eine zentrale Rolle bei der Lösung von Differenzenrandwertproblemen in der Ebene und es wird gezielt nach Verallgemeinerungen auf den höherdimensionalen Fall gesucht.

Obwohl die Approximation der klassischen Cauchy-Riemann-Operatoren durch Differenzenableitungen schon lange praktiziert wird, treten bei der tatsächlichen Umsetzung der Konzepte immer wieder Schwierigkeiten auf, wenn ganz spezielle Eigenschaften gefordert werden. So haben Duffin ([D1, D2, DD]), Ferrand [Fe], Hayabara [Hay] und andere Autoren schon vor mehr als 60 Jahren erste wesentliche Beiträge zur Approximation der Cauchy- Riemann- Operatoren durch Differenzenableitungen geliefert. Beim Aufbau einer umfassenden Theorie erkannte man schnell, dass die Algebra der diskret holomorphen Funktionen nichtkommutativ ist und somit keine Produktformel vorhanden ist. An dieser Hauptschwierigkeit arbeitet man bis heute.

Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag dazu geleistet werden, um einige der Probleme zu überwinden. Im Kapitel 2 der Arbeit stehen zunächst die diskret holomorphen Funktionen im Mittelpunkt. Vorgestellt werden zwei Approximationen der Cauchy-Riemann-Operatoren in der komplexen Ebene. Betont sei, dass sich die in dieser Arbeit betrachteten Operatoren von den in [GS1] verwendeten Cauchy-Riemann-Operatoren unterscheiden. Insbesondere kann mit den hier vorgestellten Operatoren der diskrete Laplaceoperator faktorisiert werden. Auf diese Weise wird unmittelbar der Zusammenhang zur harmonischen Analysis hergestellt. Auch gelingt in dieser

Arbeit in Analogie zu [GS1] die orthogonale Zerlegung des Raumes l_2 , so dass einer der Teilräume gerade aus den diskret holomorphen Funktionen besteht. Man beachte dazu die Ausführungen im Abschnitt 2.4.

Doch zunächst einige Ergänzungen zu Differenzenapproximationen selbst. Bereits im Buch *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* von Collatz aus dem Jahr 1951 findet man Aussagen zur Lösbarkeit der finiten Gleichungen und zu Fehlerabschätzungen für Differenzenverfahren. Darauf aufbauend leistete Samarskij 1984 mit seinem Buch *Theorie der Differenzenverfahren* [Sam] einen wichtigen Beitrag zum weiteren Ausbau der Theorie. Er richtete sein Augenmerk auf die Konstruktion von Differenzenverfahren und die theoretische Untersuchung ihrer Eigenschaften hinsichtlich des Approximationsfehlers, der Stabilität, der Konvergenz und Genauigkeit. Gleichzeitig formulierte er konstruktive Prinzipien wie Homogenität und Konservativität (Gültigkeit von Erhaltungssätzen), die im linearen Fall theoretisch begründet sind und deren Anwendbarkeit bei nichtlinearen Aufgaben durch die Praxis bestätigt wurde. Bei der Konstruktion homogener Differenzenschemata werden die verschiedensten physikalischen Prozesse durch gewisse integrale Erhaltungssätze charakterisiert. Die Herleitung der Differentialgleichungen basiert auf Integralbeziehungen, die einen Erhaltungssatz für ein kleines Volumen beinhalten. Die Differentialgleichung findet man dadurch, dass man den Volumeninhalt gegen Null streben lässt und dabei die Existenz und Stetigkeit der auftretenden Ableitungen voraussetzt. Samarskij veranschaulicht seine Resultate an einer Vielzahl von Beispielen. So werden 3- und 6-Punkt-Schemata für die eindimensionale Wärmeleitgleichung vorgestellt und der Approximationsfehler sowie die Stabilität hinsichtlich der Anfangswerte und der rechten Seite untersucht. Zur Gewinnung einer gleichmäßigen Abschätzung der Lösung nutzt er das Maximumprinzip, die energetische Methode oder die Darstellung der Lösung in Integralform mit der Greenschen Funktion.

Da es unmöglich ist, alle Details einzuarbeiten, seien hier nur noch zwei Autoren mit ihren speziellen Themen angesprochen. Hartwig und Weinelt lösen in [HW] Randwertprobleme (mit freiem Rand) mit Hilfe von Variationsungleichungen. Beim Aufstellen der Variationsungleichung und bei der Beschreibung der Lösung des Randwertproblems durch die Lösung der Variationsungleichung spielt das Minimumprinzip für die Energie eine zentrale Rolle. Aufbauend auf den Methoden von Samarskij fanden die Autoren neue Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit des Approximationsverfahrens für hinreichend reguläre Lösungen. Gegenwärtig werden Methoden bis hin zu nichtlinearen Problemen untersucht. So werden beispielsweise Variationsmethoden von Dengfeng Lü [De] genutzt, um p -Laplace-Systeme im beschränkten Gebiet mit glattem Rand zu untersuchen.

Um die diskrete Theorie weiter ausbauen zu können, wird im folgenden die Aufmerksamkeit auf die Theorie rechtsinverser Operatoren gelenkt. Wesentliche Erkenntnisse auf diesem Gebiet wurden vor allem von den Autoren Przeworska und Rolewicz [PPro] in den 70-er Jahren erzielt. Auch Calderón und Zygmund [Cal]

erzeugen Systeme von singulären Integralgleichungen auf dem Rand. Einen umfassenden Überblick über die Theorie rechtsinverser Operatoren findet man im Buch von Tasche [Ta] aus den 80-er Jahren. Mit Hilfe dieser Operatoren werden vor allem auch in [GS1] und [GS2] Lösungsdarstellungen sowohl für Differentialgleichungen als auch für Differenzengleichungen beschrieben. Wenn die entsprechenden diskreten Fundamentallösungen berechnet werden können, so erfolgt die Definition der rechtsinversen Operatoren über die Faltung mit den Fundamentallösungen. Dies geschieht im Abschnitt 2.2.2. In den Abschnitten 2.2.3 bis 2.2.4 wird die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Fundamentallösung sowie das Konvergenzverhalten in den Räumen l_p und L_p untersucht. Dabei sei betont, dass die diskreten Fundamentallösungen Einschränkungen von klassischen Funktionen auf das Gitter sind. Folglich können L_p -Abschätzungen direkt und ohne die vorherige Anwendung von Interpolationssätzen durchgeführt werden. Die Konstruktion der rechtsinversen Operatoren erfolgt schließlich im Abschnitt 2.3.1.

Fundamentallösungen für elliptische Differenzenrandwertprobleme wurden beispielsweise von Sobolev [So1, So2], Stummel [St], Thomée [Th], Boor/Höllig/Riemenschneider [BHR] und Duffin [D1, D2, DD] untersucht. Der Herangehensweise von Stummel folgend werden in der vorliegenden Arbeit diskrete Fundamentallösungen mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation berechnet. Bereits Ryabenkij [Rya, RT, RTo] nutzt diskrete Fundamentallösungen zur Definition von Differenzenpotentialen. Die vorliegende Arbeit baut auf seiner Beschreibung des diskreten Randes auf. Ryabenkij arbeitet ferner den Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit der Differenzenrandwertaufgabe und der Lösbarkeit des entsprechenden Randgleichungssystems heraus. Seine Resultate sind jedoch an starke Verträglichkeitsbedingungen hinsichtlich der rechten Seite der Differenzengleichung gebunden. Erst in der Arbeit [Ho] erfolgt die Zerlegung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential. Stellvertretend sei an dieser Stelle noch die Arbeit von Kiselman [Ki] genannt, der diskrete Cauchy-Riemann-Operatoren betrachtet und deren Fundamentallösungen studiert sowie eine Arbeit von Leinartas [Le], der mittels Fundamentallösung die Lösung des Cauchy-Problems einer höherdimensionalen homogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten beschreibt. Auch in der Arbeit [MR] spielen Fundamentallösungen eine wichtige Rolle. Hier werden lineare Randwertprobleme auf dem Gitter untersucht.

Aus der Theorie der rechtsinversen Operatoren ist bekannt, dass $I - TD$ mit dem zum Operator D rechtsinversen Operator T einen Randoperator definiert. Im klassischen komplexen Fall wird auf diese Weise ein Cauchy-Integral definiert. Die entsprechenden Darstellungsformeln für die Cauchy-Operatoren in der diskreten Theorie findet man im Abschnitt 2.3.2, in dem die diskrete Borel-Pompeiu-Formel eine zentrale Rolle spielt. Im Abschnitt 2.3.3 werden die Eigenschaften des Cauchy-Operators für eine der beiden Approximationen genauer untersucht und ein Zusammenhang zum diskreten Doppelschichtpotential hergestellt.

Die orthogonale Zerlegung des Raumes l_2 im Abschnitt 2.4.1 in einen Teilraum der diskret holomorphen Funktionen und dessen orthogonales Komplement und die dadurch mögliche diskrete Bergmann-Projektion ist als Grundlage für explizite Lösungsdarstellungen zu betrachten. Die orthogonale Zerlegung ist auch eine wichtige Grundlage für einige der Beweise im Kapitel 3. Ebenso werden durch die Sätze zur Beschränktheit der rechtsinversen Operatoren und die Definition eines diskreten Kurvenintegrals im Abschnitt 2.5 wichtige Hilfsmittel für die Untersuchungen im Abschnitt 3.3 bereitgestellt. Die Ausführungen zum diskreten Kurvenintegral orientieren sich an den Überlegungen von Duffin, der bereits in [D2] ein diskretes Kurvenintegral beschreibt und zeigt, dass die von ihm eingeführte Summe wegunabhängig ist, wenn die Funktion diskret analytisch ist. Man beachte dazu die konkreten Ausführungen im Abschnitt 2.5. Dabei ist zu beachten, dass Duffin zur Beschreibung diskret analytischer Funktionen Differenzenquotienten verwendet, bei denen die verwendeten Gitterpunkte auf einer Diagonale liegen. In der vorliegenden Arbeit werden Vorwärts- und Rückwärtsableitungen betrachtet, wobei die entsprechenden Gitterpunkte durch eine Gerade parallel zu den Achsen verbunden werden können.

Im Abschnitt 2.6. stehen elementare diskret holomorphe Funktionen im Mittelpunkt. Die Aussagen beziehen sich sowohl auf diskrete Polynome als auch die diskrete Exponentialfunktion sowie Sinus- und Cosinusfunktionen. Dabei genügen die diskreten Polynome der Appell-Eigenschaft. Bereits in [Fau] werden solche Polynome im eindimensionalen Fall von Faustino und Kähler verwendet und zu Multi-Index-Polynomen erweitert, um eine Fischerdekomposition in Bezug auf den diskreten Dirac-Operator zu erzielen und mit Euler- und Gammaoperatoren in unbeschränkten Gebieten zu arbeiten. In [D2] werden Polynome betrachtet, die diskret analytisch sind und auch in [ZeiD] werden diskret analytische Funktionen untersucht, die ein Wachstumsverhalten wie Polynome aufweisen und Fouriertransformierte von Distributionen sind. Ebenso spielen Appellsysteme in [Bo] eine zentrale Rolle, wobei wiederum in der Quaternionenalgebra gearbeitet wird. Mercat [Mer1] verwendet diskret holomorphe Polynome, um zu zeigen, dass wenn eine Folge von Abbildungen auf einer Riemannschen Oberfläche gegeben ist, jede holomorphe Funktion durch eine konvergente Folge diskret holomorpher Funktionen approximiert werden kann. Ebenfalls betrachtet Mercat in [Mer2] eine Exponentialfunktion und auch von Ferrand [Fe] wurde eine diskret analytische Exponentialfunktion eingeführt.

Das Kapitel 3 steht ganz im Zeichen der Lösung verschiedener Differenzgleichungen auf der Grundlage der diskret holomorphen Funktionen. Dabei werden sowohl Gleichungen erster Ordnung als auch Gleichungen zweiter und höherer Ordnung untersucht. Sehr ausführlich wird zunächst auf diskrete Vekuagleichungen eingegangen, die eine Verallgemeinerung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen darstellen und auch Carleman-Bers-Vekuagleichungen genannt werden. Die Resultate von Carleman [Car] mit seiner Untersuchung von allgemeinen Systemen erster Ordnung und von Bers [Be] mit der Theorie der pseudoanalytischen Funktionen

haben wesentlich zum Aufbau der Theorie beigetragen. Als Grundlage für die Untersuchungen zu Vekua-Gleichungen in dieser Arbeit diente das Buch *Verallgemeinerte analytische Funktionen* von Vekua [Vek], in dem das von Bers beschriebene Ähnlichkeitsprinzip im klassischen Fall vorgestellt wird. Vekua-Gleichungen besitzen besonders deshalb eine große Bedeutung, weil im ebenen Fall elliptische Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführt werden können. Man beachte dazu auch die Ausführungen im vorderen Teil des Abschnittes 3.2.2. Zu Beginn der Untersuchungen im Abschnitt 3.2.1 werden zunächst homogene diskrete Vekua-Gleichungen betrachtet. Dabei kann eine Produktdarstellung der Lösung erzielt werden, bei der ein Faktor eine diskret holomorphe Funktion ist und der zweite Faktor die klassische Exponentialfunktion approximiert. Folglich kann das in der Theorie von Bers beschriebene Ähnlichkeitsprinzip auch auf die diskrete Theorie übertragen werden. Im Anschluß werden inhomogene Gleichungen und Vekua-Gleichungen im quaternionischen Fall diskutiert. Am Ende des Abschnittes 3.2 werden diskrete Beltramigleichungen studiert. Die Lösung dieser Gleichungen lässt sich mit Hilfe eines diskreten Π -Operators beschreiben, der die bekannten Eigenschaften aus dem kontinuierlichen Fall aufweist.

Bei den Gleichungen zweiter und höherer Ordnung wird zunächst das diskrete Stokesproblem in der Ebene untersucht. Im Mittelpunkt steht die Lösungsdarstellung mit Hilfe des rechtsinversen Operators und eines Orthoprojektors in Bezug auf die orthogonale Zerlegung des Raumes l_2 . Existenz- und Eindeutigkeitssätze werden formuliert. Im Abschnitt 3.3.2 wird die Theorie der diskreten Operatoren zur Lösung des Lamésystems genutzt. Insbesondere kann gezeigt werden, dass die Lösung des Lamésystems gegen die Lösung des diskreten Stokesproblems aus dem Abschnitt 3.3.1 konvergiert, wenn die Poissonzahl gegen 2 strebt. Die Überlegungen im Abschnitt 3.3.3 beruhen auf der bekannten Tatsache, dass die Lösung der elastischen Grundgleichungen eines homogenen isotropen Materials im ebenen Spannungs- und Verschiebungszustand äquivalent auf die Lösung der biharmonischen Gleichung zurückgeführt werden kann. Die diskrete Version des Satzes von Goursat ist das Bindeglied zwischen der linearen Elastizitätstheorie und der komplexen Funktionentheorie mit ihren Methoden. Der Satz von Goursat besagt, dass die Lösung der biharmonischen Gleichung mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen dargestellt werden kann. Auf der Grundlage der diskret holomorphen Funktionen wird eine Lösungsdarstellung für die Verschiebungen in den diskreten Lamégleichungen erzeugt. Dabei spielen die diskreten Polynome aus dem Abschnitt 2.6.1 und die diskreten Kolosov Muskhelishvili Formeln eine wesentliche Rolle. Die erzielten Resultate sind vor allem für Untersuchungen auf dem Gebiet der Bruchmechanik sehr bedeutsam, da es in der Nähe von Singularitäten um eine möglichst genaue Lösungsdarstellung geht, die im vorliegenden Fall auf endlichen Summen beruht.

Im Abschnitt 3.3.4 steht die Lösung der diskreten Schrödingergleichung mit Hilfe einer Gleichung vom Riccatityp im Mittelpunkt. In diesem Zusammenhang wird an

einer Formel zur Differentiation eines Produktes von diskreten Funktionen gearbeitet, die einerseits möglichst übersichtlich sein soll, andererseits aber auch die im diskreten Fall unvermeidlich zu berücksichtigten Nachbargitterpunkte enthält.

Am Ende des Kapitels 3 stehen die Navier-Stokes-Gleichungen im Mittelpunkt. Auch hier spielen Orthoprojektoren und rechtsinverse Operatoren aus dem Kapitel 2 eine wesentliche Rolle. Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen kann ein Iterationsverfahren aufgestellt werden, so dass die Lösung des zu untersuchenden Differenzenrandwertproblems auf die Lösung von Stokesproblemen zurückgeführt werden kann. Abschließend werden ausgehend von einem Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen diskrete Potential- und Stromfunktionen untersucht und numerisch berechnet. Hingewiesen sei hier auf einige der Autoren, die ebenfalls auf diesem Gebiet tätig sind. So werden in der Arbeit [RTo] zeitabhängige diskrete Navier-Stokes-Gleichungen untersucht. Insbesondere wird die Methode der Differenzenpotentiale genutzt, um alle Schwierigkeiten mit den Randbedingungen zu meistern. Dabei wird mit zentralen Differenzen gearbeitet und es wird die Lösung des diskreten Problems von Zeitschicht zu Zeitschicht bestimmt. In der Arbeit [RT] wird die Konstruktion künstlicher Randbedingungen für die Berechnung kompressibler äußerer Strömungen beschrieben. Die Approximation beruht auf verallgemeinerten Potentialen und Randprojektionsoperatoren, die auf Calderón zurückgehen.

Die Lösung von diskreten Randwertproblemen kann auch anderweitig verwendet werden. So nutzt Zeilberger in [Zei1] den Zusammenhang zwischen der Lösung von Randwertproblemen und der Lösung von Differenzengleichungen in Teilräumen, die wichtig für Untersuchungen auf dem Gebiet der Kombinatorik sind. Auch in der Arbeit [Zei2] wird nach Anwendungen in der Kombinatorik gesucht. Die Überlegungen von Zeilberger bauen auf den Resultaten von Duffin auf. Desbrun, Kanso und Tong weisen in [DKT] darauf hin, dass es viele Computertechniken gibt, die auf der Diskretisierung von Differentialgleichungen beruhen. Jedoch gehen die geometrischen Strukturen, die sie simulieren, oft im Prozeß verloren. In [DKT] beschreiben die Autoren eine Möglichkeit der computergestützten Modellierung. In [STDM] wird eine strukturerhaltende Diskretisierung des Lagrange-Systems für den Elektromagnetismus entwickelt, indem Techniken für Variationsintegratoren und diskrete Differentialformen kombiniert werden. Dies ist wichtig für die numerische Lösung der Maxwell-Gleichungen. Eine Verbindung zwischen Operatortheorie und komplexer Analysis wird in der Arbeit [DJ] hergestellt. Angegeben wird die Spektraldarstellung für eine Klasse selbstadjungierter diskreter Laplace-Graphen. Diese Spektraldarstellung zerfällt in zwei Modellklassen: Baumdiagramme und Gittergraphen.

In den Kapiteln 2 und 3 werden Problemstellungen untersucht, bei denen die Theorie im kontinuierlichen Fall weit entwickelt ist. Damit war die Grundlage für die Diskretisierung geschaffen. Beim Versuch, die diskrete Theorie weiter auszubauen, wurde jedoch festgestellt, dass auch im kontinuierlichen Fall und speziell auf dem Gebiet der Quaternionenanalysis noch Funktionen genauer zu untersuchen sind, um deren

Eigenschaften gezielt nutzen zu können. Ein Beispiel dafür sind die im Abschnitt 3.2.1. diskutierten Vekuagleichungen im quaternionenwertigen Fall. Will man die diskrete Theorie im Hinblick auf das Ähnlichkeitsprinzip erweitern, so muss die hyperkomplexe Exponentialfunktion gewissen Anforderungen genügen. In dem sich nun anschließenden Kapitel 4, das als Ausblick betrachtet werden kann, soll zunächst eine hyperkomplexe Exponentialfunktion im kontinuierlichen Fall vorgestellt werden, die die bisherigen Untersuchungen in eine neue Richtung lenkt. Im Abschnitt 4.2 folgen einige Ausführungen zur Sinus- und Cosinusfunktion im höherdimensionalen Fall. Schließlich sollen im Abschnitt 4.3 erste Ansätze im Hinblick auf eine hyperkomplexe Fouriertransformation vorgestellt werden, die auf den Resultaten in den Abschnitten 4.1 und 4.2 aufbauen. Damit endet die Arbeit mit Überlegungen auf einem hochmodernen Forschungsgebiet mit verschiedenen Herangehensweisen.

Auch auf dem Gebiet der Clifford-Analysis seien einige wichtige Arbeiten zitiert, die als Anstoß für die Untersuchungen im Kapitel 4 zu betrachten sind. Dabei ist die Clifford-Analysis die Theorie der Null-Lösungen des Dirac-Operators oder eines verallgemeinerten Cauchy-Riemann Operators, die auch monogene Funktionen genannt werden. Begonnen wird mit Methoden, die die diskrete Theorie erweitern. In [FKS] bauen die Autoren unmittelbar auf der hier vorgestellten Theorie und auch auf den in [GH4] eingeführten Matrizen auf, indem Differenzenapproximationen des Dirac-Operators betrachtet werden, die den diskreten Laplaceoperator faktorisieren. Speziell werden diskret monogene Funktionen mit diskret holomorphen Funktionen auf Quad-Graphen verglichen. In [Fau1] wird ein Multivektor-Schema verwendet, um diskrete Klein-Gordon und Dirac-Gleichungen zu studieren. Dabei werden Chebyshev-Polynome erster Art genutzt. Das verwendete Clifford-Kalkül basiert auf Spinor-Feldern und erlaubt die Lösungsdarstellung der diskreten Dirac-Gleichungen auf der Grundlage der diskreten Klein-Gordon-Gleichung. In der Arbeit [KK] werden die Eigenschaften des diskreten Euleroperators untersucht. Ferner wird der inverse Operator eingeführt und eine diskrete Version des Almansi-Zerlegungssatzes für den iterierten diskreten Dirac-Operator konstruiert. Darstellungsformeln für die Null-Lösung des iterierten Dirac-Operators werden mittels Taylorreihen erzielt. Ein numerisches Beispiel wird anhand der diskreten Approximation der Stokesgleichung vorgestellt. In [RSKS] wird eine diskrete Funktionentheorie in höheren Dimensionen auf der Basis eines neuen Types von Weyl-Beziehungen aufgebaut. Auch im Höherdimensionalen ist die Erkenntnis wichtig, dass man eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsableitungen benötigt, und das nicht nur für die Faktorisierung des Laplaceoperators. Der Euleroperator wird verwendet, um homogene Polynome zu konstruieren. Bei der Fischer-Zerlegung in der harmonischen Analysis handelt es sich um die orthogonale Zerlegung des Raumes der homogenen Polynome mit Homogenitätsgrad k in Bezug auf Räume von harmonischen homogenen Polynomen. Als monogene Projektion wird die Projektion eines homogenen Polynoms auf den Raum der homogenen diskreten monogenen Polynome bezeichnet. Zu beachten ist, dass mit den eingeführten Operatoren nur in unbeschränkten Gebieten wie Räumen

oder Halbräumen gearbeitet werden kann. Erwähnt sei an dieser Stelle, dass die wesentlichen Grundlagen für diese Theorie von Sommen geschaffen und von zahlreichen Autoren weiterentwickelt wurden. In der Arbeit [BS] wird gezeigt, dass die diskrete Dirac-Gleichung im geradzahligen Fall auf das sogenannte diskrete isototische Dirac-System reduziert werden kann. Darauf beruht die Entwicklung einer Bochner-Martinelli-Formel für diskret holomorphe Funktionen. Auch hier ist der Name Sommen an erster Stelle zu nennen. Vermerkt sei, dass sich im kontinuierlichen Fall die Bochner-Martinelli-Formel für holomorphe Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher auf die traditionelle Cauchy'sche Integralformel für den eindimensionalen Fall reduziert. In [BBRS] wird im Zusammenhang mit der Wärmeleitgleichung eine Kombination zwischen einer diskreten und einer kontinuierlichen Methode vorgestellt. Konkret erfolgt die Diskretisierung nur in Bezug auf die räumlichen Koordinaten. Die Darstellung der Lösung basiert auf der Taylorreihenentwicklung. Darüber hinaus werden Lösungen für die entsprechenden Cauchy-Probleme mit Hilfe von speziellen Polynomen konstruiert. Im Zusammenhang mit dem Abschluß der hier vorliegenden Arbeit sei vor allem auf die Arbeit [Hi] verwiesen. Hier wird eine quaternionische Fouriertransformation beschrieben. Hinsichtlich deren Anwendung, beispielsweise in der Bildverarbeitung, werden die Eigenschaften der Transformation studiert. Ferner wird der Zusammenhang zwischen der quaternionischen Fouriertransformation, die im quaternionischen Bereich angewendet wird, und der nur auf reelle Signale bezogenen Transformation herausgearbeitet.

Eines der Hauptziele der Arbeit ist es, nicht nur eine einzelne Gleichung zu approximieren, sondern einen ganzen diskreten Operatorenkalkül aufzubauen. Dabei will man möglichst viele der algebraischen Eigenschaften der klassischen Operatoren (Cauchy-Riemann Operator, rechtsinverser Operator und Randoperator) übertragen. Betont sei, dass die gewonnenen Resultate keineswegs eine simple Einschränkung der Aussagen aus dem kontinuierlichen Fall sind und auch keine Approximation. Es geht vielmehr darum, die analoge Eigenschaft für Gitterfunktionen zu beweisen, so dass die algebraischen Operationen in bekannter Weise ausgeführt werden können. Dabei gibt es einerseits Eigenschaften, die den Aufbau einer diskreten Theorie erleichtern. Dazu gehört die Tatsache, dass die Fundamentallösung der diskreten Cauchy- Riemann- Operatoren bei Wahl einer festen Schrittweite h keine Polstelle besitzt. Andererseits stößt man auf Fakten, die eine unmittelbare Übertragung der Aussagen vom kontinuierlichen Fall unmöglich machen. Dazu gehört die Nichtkommutativität der Algebra der diskret holomorphen Funktionen. So gibt es kein einfaches Analogon zur Leibnitzregel. Da auch in der hyperkomplexen Theorie die Kommutativität nicht gegeben ist, viele wichtige Eigenschaften aber trotzdem gezeigt werden können, wird der höherdimensionale Fall als Anreiz zur Überwindung der auftretenden Schwierigkeiten genutzt. Ebenso ist eine Potenzreihenentwicklung im beschränkten Gebiet nicht möglich. Die Hauptschwierigkeit dabei sind diskret holomorphe Potenzen. In diesem Fall sind ganz neue Überlegungen und Herangehensweisen gefragt.

Kapitel 2

Diskret holomorphe Funktionen

2.1 Einleitung

Die Idee, Cauchy-Riemann-Operatoren mit Hilfe von Differenzenableitungen zu approximieren, ist schon sehr alt. Dennoch erweist es sich als schwierig, ganze Klassen von Lösungen der Differenzengleichungen als diskretes Analogon holomorpher Funktionen zu betrachten. Erste Ansätze findet man in [D2], [DD], [Fe], [Hay], [I1] und [I2]. In Bezug auf ähnliche Entwicklungen auf dem Gebiet der diskret harmonischen Funktionen sei auf die Arbeiten [DS], [D1], [Ho], [Rya] und [Th] verwiesen. Die Hauptschwierigkeiten bestehen darin, dass diskret holomorphe Funktionen auch diskret harmonische Funktionen sein sollen und dass ein diskreter Ausdruck zu finden ist, der das Cauchy-Integral approximiert. Zusätzlich ist zu beachten, dass diskret holomorphe Funktionen keine Algebra bilden. Erste Ansatzmöglichkeiten, um diese Schwierigkeiten zu überwinden, findet man sowohl auf dem Gebiet der diskret harmonischen Funktionen als auch auf dem Gebiet der Differenzenpotentiale. Die Theorie der Differenzenpotentiale konnte in [Ho] erweitert werden, indem ein diskretes Analogon zum Einfach- und Doppelschichtpotential eingeführt wurde. Grundlage dieses Konzeptes ist die Existenz diskreter Fundamentallösungen. Einige Jahre zuvor wurden von den Autoren Gürlebeck und Sprößig (siehe [GS1] und [GS2]) ähnliche Ideen aufgegriffen, um Lösungen von Cauchy-Riemann-Gleichungen im dreidimensionalen Fall zu studieren. Dabei bilden selbst im kontinuierlichen Fall monogene oder hyperholomorphe Funktionen keine Algebra. Einige grundlegende Ideen dieser Theorie werden im folgenden weiter verfolgt.

In diesem Kapitel werden zwei Approximationen der Cauchy-Riemann-Operatoren in der komplexen Ebene vorgestellt, die auch im diskreten Fall jeweils eine Faktorisierung des Laplace-Operators in zwei adjunkte Cauchy-Riemann-Operatoren ermöglichen. Im folgenden Abschnitt werden die Fundamentallösungen dieser Differenzenoperatoren berechnet und deren Eigenschaften eingehend studiert. Im Abschnitt

2.3 steht die Definition eines diskreten Analogons zum komplexen T -Operator und die Konstruktion eines diskreten Cauchy-Integrals im Mittelpunkt. Ferner wird gezeigt, wie mit Hilfe der diskreten Cauchy-Riemann-Operatoren eine orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ erzielt werden kann. Damit verfügt man über ein entscheidendes Hilfsmittel, um beispielsweise diskrete Bergmann-Projektionen definieren zu können. Auf der Grundlage des im Abschnitt 2.5 vorgestellten diskreten Kurvenintegrals können später im Abschnitt 3.3 konjugiert harmonische Funktionen konstruiert werden. Schließlich werden im Abschnitt 2.6 ganz elementare diskret holomorphe Funktionen vorgestellt und deren Eigenschaften diskutiert.

2.2 Diskrete Cauchy-Riemann-Operatoren und die Berechnung des diskreten Cauchy-Kerns

2.2.1 Der kontinuierliche Fall als Ausgangspunkt

Es sei \mathbb{R}^2 der zweidimensionale Euklidische Raum und $x = (x_1, x_2)$ ein beliebiges Element dieses Raumes. Betrachtet werden die Cauchy-Riemann-Operatoren

$$D^1 = (-\mathbf{i})\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \quad \text{und} \quad D^2 = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

die der Beziehung $D^1 D^2 = D^2 D^1 = \Delta$ mit $\Delta u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ genügen. Ferner sei \mathcal{D} der Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Im Distributionensinn wird jede Lösung $E^k(x)$ der Gleichungen

$$D^k E^k(x) = \delta(x) \quad \text{mit} \quad (\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad \text{und} \quad k \in \{1, 2\}$$

Fundamentallösung genannt. Für diese Fundamentallösungen gilt

$$E^1(x) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi(x_1 + \mathbf{i}x_2)} \quad \text{und} \quad E^2(x) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi(x_1 - \mathbf{i}x_2)}.$$

Bezeichnet man mit $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$ das Euklidische Skalarprodukt, dann erhält man mittels Fouriertransformation $(Fu)(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} u(\xi) e^{-\mathbf{i}\langle x, \xi \rangle} d\xi$ und der inversen Transformation $(F^{-1}v)(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{x \in \mathbb{R}^2} v(x) e^{\mathbf{i}\langle x, \xi \rangle} dx$ die Darstellung

$$(F^{-1}E^1)(\xi) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \left(\frac{\xi_2 + \mathbf{i}\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) \quad \text{und} \quad (F^{-1}E^2)(\xi) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \left(\frac{\xi_2 - \mathbf{i}\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right).$$

Auf Grund des Gruppenhomomorphismus zwischen komplexen Zahlen $a + \mathbf{i}b$ und Matrizen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ kann die Fundamentallösung auch in Matrixform geschrieben werden. Es gilt

$$E^1(x) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \begin{pmatrix} F(\xi_2/|\xi|^2) & -F(\xi_1/|\xi|^2) \\ F(\xi_1/|\xi|^2) & F(\xi_2/|\xi|^2) \end{pmatrix}, \quad E^2(x) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \begin{pmatrix} F(\xi_2/|\xi|^2) & F(\xi_1/|\xi|^2) \\ -F(\xi_1/|\xi|^2) & F(\xi_2/|\xi|^2) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $\xi_j|\xi|^{-2}$, $j \in \{1, 2\}$ lokal integrierbar sind. Als reguläre Distributionen werden diese Funktionen mit dem Funktional $(\xi_j|\xi|^{-2}, \varphi)$ identifiziert. Dies entspricht der Vorgehensweise in [Wla], Paragraph 5.5.

2.2.2 Diskrete Theorie

Es seien $b_1 = (1, 0)$ und $b_2 = (0, 1)$ die Einheitsvektoren im Raum \mathbb{R}^2 . Durch $\mathbb{R}_h^2 = \{mh = (m_1h, m_2h) \text{ mit } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ wird ein gleichmäßiges Gitter der Schrittweite h definiert. Man beachte im folgenden, dass zur Vereinfachung der Formeln die Schrittweite h bei den einzelnen Gitterpunkten weggelassen wird. Keinesfalls erfolgt jedoch eine Einschränkung auf die Schrittweite $h = 1$. An Stellen, wo die Schrittweite besonders wichtig ist, wird sie weiterhin mitgeführt. Untersucht werden im folgenden komplexwertige Funktionen

$$u(m) = (\operatorname{Re} u(m), \operatorname{Im} u(m))^T = (u_0(m), u_1(m))^T$$

mit den Vorwärtsableitungen $D_h^j u_k(m) = h^{-1}(u_k(m + b_j) - u_k(m))$ und Rückwärtsableitungen $D_h^{-j} u_k(m) = h^{-1}(u_k(m) - u_k(m - b_j))$ für $j \in \{1, 2\}$ und $k \in \{0, 1\}$. Die Cauchy-Riemann-Operatoren können einerseits mit Hilfe der Differenzenoperatoren

$$D_{h,M}^1 = \begin{pmatrix} D_h^{-2} & D_h^1 \\ -D_h^{-1} & D_h^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_{h,M}^2 = \begin{pmatrix} D_h^2 & -D_h^1 \\ D_h^{-1} & D_h^{-2} \end{pmatrix}$$

approximiert werden. Für hinreichend glatte Funktionen u konvergiert der Ausdruck

$$D_{h,M}^1 u = (-\mathbf{i})[(D_h^{-1} \operatorname{Re} u + \mathbf{i} D_h^1 \operatorname{Im} u) + \mathbf{i}(D_h^{-2} \operatorname{Re} u + \mathbf{i} D_h^2 \operatorname{Im} u)]$$

gegen $(-\mathbf{i})\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$, während der Ausdruck

$$D_{h,M}^2 u = \mathbf{i}[(D_h^{-1} \operatorname{Re} u + \mathbf{i} D_h^1 \operatorname{Im} u) - \mathbf{i}(D_h^2 \operatorname{Re} u + \mathbf{i} D_h^{-2} \operatorname{Im} u)]$$

gegen $\mathbf{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ konvergiert. Eine zweite Möglichkeit der Approximation besteht durch die Differenzenoperatoren

$$D^{1h} = \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D^{2h} = \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Approximationen unterscheiden sich von den obigen Operatoren durch den Faktor $-\mathbf{i}$ bzw. \mathbf{i} . Konkret gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h^{-2} & D_h^1 \\ -D_h^{-1} & D_h^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h^2 & -D_h^1 \\ D_h^{-1} & D_h^{-2} \end{pmatrix}.$$

Benutzt wird im weiteren stets die Approximation, die der jeweiligen kontinuierlichen Situation am besten angepasst erscheint. Weitere Approximationen der Cauchy-Riemann-Operatoren findet man beispielsweise in [D2],[Fe],[I1] sowie [I2].

Obige Differenzenoperatoren besitzen die wesentliche Eigenschaft

$$D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 = D_{h,M}^2 D_{h,M}^1 = D^{1h} D^{2h} = D^{2h} D^{1h} = I_2 \Delta_h,$$

wobei mit I_2 die 2×2 Einheitsmatrix bezeichnet wird und der diskrete Laplaceoperator die Gestalt

$$\Delta_h u_h(m) = \sum_{k \in K} a_k u_h(m-k) \quad \text{mit} \quad K = \{(0,0), (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\}$$

$$\text{und } a_k = \begin{cases} 1/h^2 & \text{für } k \in K, k \neq (0,0) \\ -4/h^2 & \text{für } k = (0,0) \end{cases} \quad \text{hat.}$$

Funktionen $u_h(m)$ mit der Eigenschaft $\Delta_h u_h(m) = 0$ in allen Gitterpunkten werden *diskret harmonisch* genannt.

Je nach Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren werden im folgenden Funktionen $w(m)$, für die in allen Gitterpunkten $D_{h,M}^1 w(m) = 0$ oder $D^{1h} w(m) = 0$ gilt, als *diskret holomorph* bezeichnet. Analog werden Funktionen $v(m)$ mit der Eigenschaft $D_{h,M}^2 v(m) = 0$ oder $D^{2h} v(m) = 0$ als *diskret anti-holomorph* bezeichnet. Aufgrund der Faktorisierung des Laplaceoperators sind damit diskret holomorphe Funktionen automatisch auch diskret harmonisch. Dies ist ein ganz wesentlicher Vorteil, der beim weiteren Ausbau der diskreten Theorie eine große Rolle spielen wird.

Hervorgehoben sei an dieser Stelle auch, dass auf Grund des Gruppenhomomorphismus anstelle der imaginären Einheit in der diskreten Theorie die Matrixschreibweise $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ verwendet wird. Als Konsequenz aus der Nichtkommutativität der Matrizen werden die diskret holomorphen Funktionen damit in reellen Vektorräumen definiert sein.

Im folgenden steht die erste Approximation im Mittelpunkt. Jede 2×2 -Matrix $E_{h,M}^j(m)$, die Lösung des Gleichungssystems $D_{h,M}^j E_{h,M}^j(m) = I_2 \delta_h(m)$ mit $j \in \{1, 2\}$ ist, wird *diskrete Fundamentallösung* genannt. Dabei gilt

$$\delta_h(m) = \begin{cases} h^{-2} & m = (0, 0) \\ 0 & m \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Diese Schreibweise ist so zu verstehen, dass der diskrete Cauchy-Riemann-Operator auf jede Spalte der Matrix $E_{h,M}^1(m)$ bzw. $E_{h,M}^2(m)$ angewendet wird. Im folgenden wird jedes Matricelement der diskreten Fundamentallösung mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation (siehe beispielsweise [St]) umgeformt. Dabei folgen aus

$$(F_h u_h)(\xi) = \begin{cases} \frac{h^2}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{R}_h^2} u_h(m) e^{ih \langle m, \xi \rangle} & \xi \in Q_h \\ 0 & \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h \end{cases}$$

mit $Q_h = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : -\pi/h < \xi_j < \pi/h\}$ und den Eigenschaften

$$\begin{aligned} F_h(D_h^j u_h) &= -\xi_{-j}^h F_h u_h, & \xi_{-j}^h &= h^{-1}(1 - e^{-ih\xi_j}), \\ F_h(D_h^{-j} u_h) &= \xi_j^h F_h u_h, & \xi_j^h &= h^{-1}(1 - e^{ih\xi_j}) \end{aligned} \quad \text{für } j \in \{1, 2\}$$

die Beziehungen $A_1 F_h E_{h,M}^1(m) = I_2 F_h \delta_h(m)$ und $A_2 F_h E_{h,M}^2(m) = I_2 F_h \delta_h(m)$ mit $F_h \delta_h(m) = (2\pi)^{-1}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \xi_2^h & -\xi_{-1}^h \\ -\xi_1^h & -\xi_{-2}^h \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} -\xi_{-2}^h & \xi_{-1}^h \\ \xi_1^h & \xi_2^h \end{pmatrix}$.

Als Fouriertransformierte der diskreten Fundamentallösungen erhält man

$$(F_h E_{h,M}^1)(\xi) = (2\pi)^{-1} (A_1)^{-1} \quad \text{und} \quad (F_h E_{h,M}^2)(\xi) = (2\pi)^{-1} (A_2)^{-1}.$$

In Analogie zur Eigenschaft

$$D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 = D_{h,M}^2 D_{h,M}^1 = I_2 \Delta_h \quad \text{mit} \quad \Delta_h = D_h^1 D_h^{-1} + D_h^2 D_h^{-2}$$

kann im Fourier-transformierten Bereich die Beziehung $A_1 A_2 = A_2 A_1 = -d^2 I_2$ mit $d^2 = 4h^{-2} \left(\sin^2 \frac{h\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_2}{2} \right)$ bewiesen werden. Daraus ergibt sich

$$(F_h E_{h,M}^1)(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{d^2} A_2 \quad \text{und} \quad (F_h E_{h,M}^2)(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{d^2} A_1.$$

Ferner wird in jeder Matrixkomponente die inverse diskrete Fouriertransformation $(F_h)^{-1} = R_h F$ angewendet, wobei $R_h u$ die Einschränkung der Funktion u auf das Gitter \mathbb{R}_h^2 bezeichnet und das Symbol F für die klassische Fouriertransformation (siehe Abschnitt 2.2.1) steht. Dadurch ergeben sich folgende Darstellungsformeln:

$$E_{h,M}^1(m) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} R_h F(\xi_{-2}^h/d^2) & R_h F(-\xi_{-1}^h/d^2) \\ R_h F(-\xi_1^h/d^2) & R_h F(-\xi_2^h/d^2) \end{pmatrix}$$

und

$$E_{h,M}^2(m) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} R_h F(-\xi_2^h/d^2) & R_h F(\xi_{-1}^h/d^2) \\ R_h F(\xi_1^h/d^2) & R_h F(\xi_{-2}^h/d^2) \end{pmatrix}.$$

Die Tatsache, dass die diskrete Fouriertransformation eine Abbildung vom Gitter \mathbb{R}_h^2 auf das Quadrat Q_h ist, hat zur Folge, dass die Integrationsvariable im Ausdruck $R_h F F_h u_h(m)$ auf Q_h beschränkt ist. Um obige Darstellungsformeln zu vereinfachen, wurde die charakteristische Funktion χ_{Q_h} in den Matrixeinträgen weggelassen.

Darüber hinaus sei erwähnt, dass die diskrete Fundamentallösung zunächst nicht eindeutig ist. Mit der Zusatzforderung, dass sie im Unendlichen gegen Null streben soll, wird die Fundamentallösung jedoch eindeutig.

Unter Verwendung der zweiten Approximation erhält man ausgehend von der Differenzgleichung $D^{jh} E_h^j(m) = I_2 \delta_h(m)$ mit $j \in \{1, 2\}$ durch Wiederholung der obigen Vorgehensweise die Darstellungsformeln

$$E_h^1(m) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} R_h F(\xi_{-1}^h/d^2) & R_h F(\xi_{-2}^h/d^2) \\ R_h F(\xi_2^h/d^2) & R_h F(-\xi_1^h/d^2) \end{pmatrix}$$

und

$$E_h^2(m) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} R_h F(-\xi_1^h/d^2) & R_h F(-\xi_{-2}^h/d^2) \\ R_h F(-\xi_2^h/d^2) & R_h F(\xi_{-1}^h/d^2) \end{pmatrix}.$$

In Vorbereitung auf die Fehlerabschätzungen im Abschnitt 2.2.3 werden abschließend die Matrixelemente der diskreten Fundamentallösungen abgeschätzt. Alle folgenden Resultate im Abschnitt 2.2 wurden bereits in der Arbeit [GH2] für die erste Approximation veröffentlicht.

Lemma 2.2.1 *In jedem Gitterpunkt $m = (m_1, m_2)$ können die Elemente der Matrizen $E_{h,M}^1(m)$ und $E_{h,M}^2(m)$ sowie $E_h^1(m)$ und $E_h^2(m)$ in der Form*

$$\left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{\xi_{\pm l}^h}{d^2} e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \right| \leq \frac{C_1 h}{(|m| + h)^2} + \frac{C_2}{|m| + h} \quad \forall l \in \{1, 2\}.$$

abgeschätzt werden. Dabei sind C_1 und C_2 Konstanten.

Der Beweis des Lemmas beruht auf folgendem Theorem von Thomée (siehe [Th]):

Satz 2.2.1 *Es seien d die Dimension des Euklidischen Raumes und p_1 und p_2 zwei positive ganze Zahlen mit $p_2 < p_1 + d$. Für $N > 0$ sei κ_N die Menge aller Funktionen der Gestalt $T(\Theta) = \frac{T_1(\Theta)}{T_2(\Theta)}$, $0 \neq \Theta \in Q_\pi$. Dabei bezeichnen $T_j(\Theta)$ trigonometrische Polynome*

$$T_j(\Theta) = \sum_{\mu} t_{j,\mu} e^{i\langle \mu, \Theta \rangle}, \quad j = 1, 2$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Es existieren gewöhnliche homogene Polynome $P_j(\Theta)$ vom Grad p_j , $j = 1, 2$, so daß gilt $T_j(\Theta) = P_j(\Theta) + o(|\Theta|^{p_j})$ für $\Theta \rightarrow 0$.
- (ii) $|T_2(\Theta)| \geq N^{-1}|\Theta|^{p_2}$, $\Theta \in Q_\pi$
- (iii) $|t_{j,\mu}| \leq N$
- (iv) $t_{j,\mu} = 0$ für $|\mu| > N$.

Unter diesen Voraussetzungen existiert für jedes $N > 0$ eine Konstante C , so daß für alle μ (mit ganzzahligen Komponenten) und $T \in \kappa_N$ gilt

$$\left| \int_{Q_\pi} T(\Theta) e^{i\langle \mu, \Theta \rangle} d\Theta \right| \leq C(|\mu| + 1)^{-(d+p_1-p_2)}.$$

Beweis von Lemma 2.2.1: Mit Hilfe der Substitution $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2) = (h\xi_1, h\xi_2)$ folgt

$$\begin{aligned} I &= \pm \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{\xi_{\pm l}^h}{d^2}, e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi = \pm \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{h} \int_{\Theta \in Q_\pi} \frac{1 - e^{\pm i\Theta_l}}{d_\Theta^2} e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta \\ &= \pm \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{h} \int_{\Theta \in Q_\pi} \frac{1 - \cos \Theta_l}{d_\Theta^2} e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta \pm \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{h} \int_{\Theta \in Q_\pi} \frac{\mp i \sin \Theta_l}{d_\Theta^2} e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta \end{aligned}$$

mit $Q_\pi = \{\Theta \in \mathbb{R}^2 : -\pi < \Theta_j < \pi, j = 1, 2\}$ und $d_\Theta^2 = 4 \left(\sin^2 \frac{\Theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\Theta_2}{2} \right)$. Alle Voraussetzungen des Satzes 2.2.1 sind erfüllt. Während sich für den ersten Summanden der obigen Formel $p_1 = p_2 = 2$ ergibt, ist für den zweiten Summanden die Wahl von $p_1 = 1$ und $p_2 = 2$ geeignet. Damit ist Lemma 2.2.1 bewiesen. ■

2.2.3 Die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Fundamentallösung

In diesem Abschnitt soll die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Fundamentallösung punktweise abgeschätzt werden. Diese Vorgehensweise ermöglicht es, in den folgenden beiden Abschnitten Konvergenzaussagen zu beweisen.

Im Mittelpunkt steht wieder die erste Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren. Alle Überlegungen gelten jedoch auch unter Verwendung der zweiten Approximation. Betrachtet werden die einzelnen Matrixelemente in den Gitterpunkten. Zur Vermeidung vieler Indizes werden die Matrixelemente der diskreten Fundamentallösung mit $E_{hlj}^k(m)$ bezeichnet. Um auch mit der kontinuierlichen Fundamentallösung im Gitterpunkt $(0, 0)$ arbeiten zu können, sei

$$\hat{E}^k(m) = \begin{cases} E^k(m), & \text{wenn } m \neq (0, 0) \\ 0, & \text{wenn } m = (0, 0) \end{cases} \quad \text{mit } k \in \{1, 2\}.$$

Im Fall $m \neq (0, 0)$ kann jedes Matricelement in der Form

$$\begin{aligned} E_{hlj}^k(m) - \hat{E}_{lj}^k(m) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\pm \int_{\xi \in Q_h} \frac{1 - \cos(h\xi_s)}{h d^2} e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \right. \\ &\quad \left. \pm i \int_{\xi \in Q_h} \left(\frac{\sin(h\xi_s)}{h d^2} - \frac{\xi_s}{|\xi|^2} \right) e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \pm \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} -\frac{i \xi_s}{|\xi|^2} e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \right) \end{aligned}$$

mit $l, j \in \{1, 2\}$, $s = 2$ wenn $l = j$ und $s = 1$ im Fall $l \neq j$ geschrieben werden.

Lemma 2.2.2 *In allen Gitterpunkten $m = (m_1, m_2) \neq (0, 0)$ ist die Ungleichung $|E_{hlj}^k(m) - \hat{E}_{lj}^k(m)| \leq C h |m|^{-2} \forall l, j, k \in \{1, 2\}$ erfüllt. Im Fall $m = (0, 0)$ gilt $|E_{hlj}^k(m) - \hat{E}_{lj}^k(m)| \leq C h^{-1}$.*

Beweis: Im Fall $m = (0, 0)$ folgt die Abschätzung unmittelbar aus Lemma 2.2.1. Zu betrachten bleibt der Fall $m \neq (0, 0)$. Der Beweis wird für den Spezialfall $s = 1$ geführt und kann unmittelbar auf den Fall $s = 2$ übertragen werden. Substituiert man $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2) = (h\xi_1, h\xi_2)$, so resultiert aus Lemma 2.2.1 und Satz 2.2.1

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{1 - \cos(h\xi_1)}{h d^2} e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{h} \int_{\xi \in Q_\pi} \frac{1 - \cos(\Theta_1)}{d_\Theta^2} e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta \right| \leq \frac{C_1 h}{(|m| + h)^2}. \end{aligned}$$

Abzuschätzen bleibt das Integral

$$\begin{aligned} |I_2| &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{\xi \in Q_h} \left(\frac{\sin(h\xi_1)}{h d^2} - \frac{\xi_1}{|\xi|^2} \right) e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi - \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{\xi_1}{|\xi|^2} e^{-ih\langle m, \xi \rangle} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 h} \left| \int_{\Theta \in Q_\pi} \left(\frac{\sin(\Theta_1)}{d_\Theta^2} - \frac{\Theta_1}{|\Theta|^2} \right) e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta - \int_{\Theta \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_\pi} \frac{\Theta_1}{|\Theta|^2} e^{-i\langle m, \Theta \rangle} d\Theta \right| \\ &= |[F v_1](m)| \end{aligned}$$

mit

$$v_1(\Theta) = \frac{1}{2\pi h} \left[\left(\frac{\sin(\Theta_1)}{d_\Theta^2} - \frac{\Theta_1}{|\Theta|^2} \right) \chi_{Q_\pi} - \frac{\Theta_1}{|\Theta|^2} \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus Q_\pi} \right].$$

Die Funktion $v_1(\Theta)$ ist lokal integrierbar und kann mit dem Funktional (v_1, φ) für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ identifiziert werden. Somit gilt allgemein für $x = (x_1, x_2)$

$$([F v_1](x), \varphi(x)) = (v_1(\Theta), [F \varphi](\Theta)) = \left(-\frac{1}{x_1^2} F \left(\frac{\partial^2 v_1(\Theta)}{\partial \Theta_1^2} \right), \varphi(x) \right). \quad (2.1)$$

Die hier auftretende zweite partielle Ableitung wird genauer untersucht: Es sei Γ_{Q_π} der Rand des Quadrates Q_π und $\overline{Q_\pi} = Q_\pi \cup \Gamma_{Q_\pi}$. Der Bezeichnung von Wladimierow (siehe [Wla]) folgend, gilt allgemein für die zweite Ableitung der Funktion $v_1(\Theta) \in C^2(\overline{Q_\pi}) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q_\pi})$ im Distributionensinn

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} = \left\{ \frac{\partial^2 v_1}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial \Theta_j} ([v_1]_{\Gamma_{Q_\pi}} \cos(\vec{n}, \Theta_i) \chi_{\Gamma_{Q_\pi}}) + \left[\left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \Theta_i} \right\} \right]_{\Gamma_{Q_\pi}} \cos(\vec{n}, \Theta_j) \chi_{\Gamma_{Q_\pi}}.$$

Dabei bezeichnet \vec{n} den äußeren Normalenvektor im Punkt $\Theta \in \Gamma_{Q_\pi}$, $\left\{ \frac{\partial^2 v_1}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right\}$ bzw. $\left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \Theta_i} \right\}$ entspricht den klassischen Anteilen der Distributionen $\frac{\partial^2 v_1}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}$ bzw. $\frac{\partial v_1}{\partial \Theta_i}$ und $[v_1]_{\Gamma_{Q_\pi}}$ sowie $\left[\left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \Theta_i} \right\} \right]_{\Gamma_{Q_\pi}}$ dem Sprung von v_1 und $\left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \Theta_i} \right\}$ beim Durchgang durch den Rand Γ_{Q_π} von $\mathbb{R}^2 \setminus Q_\pi$ nach Q_π in Richtung \vec{n} .

Entsprechend dieser Formel gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \Theta_1^2} &= \frac{1}{2\pi h} \left[\left(-\frac{\sin(\Theta_1)}{d_\Theta^2} - \frac{3 \sin(2\Theta_1)}{d_\Theta^4} + \frac{8 \sin^3(\Theta_1)}{d_\Theta^6} + \frac{6 \Theta_1}{|\Theta|^4} - \frac{8 \Theta_1^3}{|\Theta|^6} \right) \chi_{Q_\pi} \right. \\ &\quad + \left(\frac{6 \Theta_1}{|\Theta|^4} - \frac{8 \Theta_1^3}{|\Theta|^6} \right) \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus Q_\pi} + \frac{\partial}{\partial \Theta_1} \left(-\frac{\sin(\Theta_1)}{d_\Theta^2} \right) \cos(\vec{n}, \Theta_1) \chi_{\Gamma_{Q_\pi}} \\ &\quad \left. + \left(\frac{2 \sin^2(\Theta_1)}{d_\Theta^4} - \frac{\cos(\Theta_1)}{d_\Theta^2} \right) \cos(\vec{n}, \Theta_1) \chi_{\Gamma_{Q_\pi}} \right]. \end{aligned}$$

Nach Formel (2.1) kann nun das Fourierintegral in den Punkten $x = m = (m_1, m_2)$ in der Form

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m_1^2} F \left(\frac{\partial^2 v_1(\Theta)}{\partial \Theta_1^2} \right) &= -\frac{1}{(2\pi)^2 h m_1^2} \left[\int_{\Theta \in Q_\pi} \left(-\frac{\sin(\Theta_1)}{d_\Theta^2} - \frac{3 \sin(2\Theta_1)}{d_\Theta^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{8 \sin^3(\Theta_1)}{d_\Theta^6} + \frac{6 \Theta_1}{|\Theta|^4} - \frac{8 \Theta_1^3}{|\Theta|^6} \right) e^{-i \langle m, \Theta \rangle} d\Theta + \int_{\Theta \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_\pi} \left(\frac{6 \Theta_1}{|\Theta|^4} - \frac{8 \Theta_1^3}{|\Theta|^6} \right) e^{-i \langle m, \Theta \rangle} d\Theta \right] \end{aligned}$$

geschrieben werden, da die Fouriertransformierte der restlichen zwei Summanden Null wird. Der Integrand des ersten Integrals kann nach oben durch $C|\Theta|^{-1}$ abgeschätzt werden. Daraus resultiert in Verbindung mit Gleichung (2.1) die Ungleichung $|I_2| = |[Fv_1](m)| \leq C h |m_1|^{-2}$. In Analogie gilt $|I_2| \leq C h |m_2|^{-2}$. Wählt man nun $k \in \{1, 2\}$ so, dass $|m_k| = \max_{i \in \{1, 2\}} |m_i| > 0$ gilt, so erhält man mit $|m| \leq \sqrt{2} |m_k|$ die Abschätzung $|I_2| \leq C h |m|^{-2}$.

Auf Grund der Ungleichung

$$|E_{hlj}^k(m) - \hat{E}_{lj}^k(m)| \leq |I_1| + |I_2| \leq C h |m|^{-2} \quad \forall l, j, k \in \{1, 2\}$$

ist Lemma 2.2.2 vollständig bewiesen. ■

Verallgemeinerungen der Aussagen aus den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 auf Dirac-Operatoren findet man in [GH4].

2.2.4 Konvergenz im Raum l_p

Neben der punktweisen Abschätzung soll nun die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Fundamentallösung im Raum l_p untersucht werden. Wieder beziehen sich die Ausführungen auf die erste Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren. Auf Grund der Matrixschreibweise wird die Euklidische Matrixnorm

$$\|E_{h,M}^k(m) - \hat{E}^k(m)\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^2 |E_{hij}^k(m) - \hat{E}_{ij}^k(m)|^2 \right)^{1/2}$$

verwendet. Ferner sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2) \subset \mathbb{R}_h^2$. $Q(G_h)$ bezeichnet das kleinste Quadrat parallel zu den Koordinatenachsen mit Mittelpunkt $(0,0)$, welches das Gebiet G_h überdeckt. Die Länge dieses Quadrates sei $L = 2lh$.

Satz 2.2.2 *Bei Wahl der Schrittweite $h \leq e^{-1}$ gilt für $k \in \{1, 2\}$*

$$\|E_{h,M}^k(m) - \hat{E}^k(m)\|_{l_p(G_h)} \leq \begin{cases} C_1 h^{-1+2/p}, & \text{wenn } 1 < p < 2 \\ C_2 h |\ln h|, & \text{wenn } p = 1. \end{cases}$$

Beweis: Aus Lemma 2.2.2 folgt

$$\begin{aligned} \|E_{h,M}^k(m) - \hat{E}^k(m)\|_{l_p(G_h)}^p &= \sum_{m \in G_h} \|E_{h,M}^k(m) - \hat{E}^k(m)\|_2^p h^2 \\ &\leq \sum_{m \in G_h \setminus (0,0)} \left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{C_3 h^2}{|mh|^4} \right)^{p/2} h^2 + \sum_{i,j=1}^2 C_4 h^{-p+2} \\ &= C_5(p) \left[\sum_{mh \in G_h \setminus (0,0)} \left(\frac{h}{|mh|^2} \right)^p h^2 + h^{-p+2} \right] \\ &\leq C_5(p) \left(4 \sum_{m_1=1}^l \sum_{m_2=1}^l (m_1^2 + m_2^2)^{-p} h^{-p+2} + 4 \sum_{m=1}^l m^{-2p} h^{-p+2} + h^{-p+2} \right) \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden auf der rechten Seite werden nun weiter abgeschätzt. Unter der Voraussetzung $h \leq e^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1=1}^l \sum_{m_2=1}^l (m_1^2 + m_2^2)^{-p} h^{-p+2} \\ &\leq 2^{-p} h^{-p+2} + 2 h^{-p+1} \int_{x=h}^{lh} \left(\frac{h}{x} \right)^{2p} dx + h^{-p} \int_{r=h}^{\sqrt{2}lh} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\frac{h}{r} \right)^{2p} r d\varphi dr \\ &\leq \begin{cases} C_6 h^{-p+2}, & \text{wenn } 1 < p < 2 \\ C_7 h |\ln h|, & \text{wenn } p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\sum_{m=1}^l m^{-2p} h^{-p+2} \leq h^{-p+2} + h^{-p+1} \int_{x=h}^{lh} \left(\frac{h}{x}\right)^{2p} dx \leq C_8 h^{-p+2} \quad \text{für } 1 \leq p < 2.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes ■

Im obigen Satz wurde von einem beschränkten Gebiet ausgegangen. Der Beweis des Satzes gestattet auch eine Verallgemeinerung auf alle Gitterpunkte der Ebene. Lediglich im Fall $p = 1$ kann die Seitenlänge des Quadrates $Q(G_h)$ nicht beliebig lang werden.

Folgerung 2.2.1 Für jedes $h \leq e^{-1}$, $k \in \{1, 2\}$ und $1 < p < 2$ gilt

$$\|E_{h,M}^k(m) - \hat{E}^k(m)\|_{l_p(\mathbb{R}_h^2)} \leq C h^{-1+2/p}.$$

Betont sei an dieser Stelle, dass durch diese Abschätzung nicht nur das Verhalten in der Nähe der Singularität beschrieben wird, sondern auch im Unendlichen. Dies ist ein ganz entscheidender Vorteil von diskreten Fundamentallösungen, der zeigt, dass diese universal einsetzbar sind, während im Vergleich dazu Greensche Funktionen sehr stark vom betrachteten Gebiet abhängen.

2.2.5 Konvergenz im Raum L_p

Die Matrixelemente der diskreten Fundamentallösungen $E_{h,M}^1(m)$ und $E_{h,M}^2(m)$ wurden im Abschnitt 2.2.2 als Einschränkung der klassischen Fouriertransformierten auf das Gitter \mathbb{R}_h^2 definiert. Vernachlässigt man diese Einschränkung, so können die Differenzen $E_{h,M}^1(x) - E^1(x)$ und $E_{h,M}^2(x) - E^2(x)$ im Raum L_p mit $1 < p < 4/3$ abgeschätzt werden. Die hier angegebene obere Grenze für p ist beweistechnisch bedingt. Die entsprechende Stelle wird im Beweis deutlich gemacht.

Bemerkenswert ist, dass diese Vorgehensweise überhaupt möglich ist, da durch Weglassen der Einschränkung der klassischen Fouriertransformation auf das Gitter gewissermaßen eine natürliche Fortsetzung existiert und somit keine Interpolation erfolgen muss.

Satz 2.2.3 Es sei G ein beschränktes Gebiet, h_0 eine fest gewählte Schrittweite und $1 < p < 4/3$. Für jede Schrittweite $h \leq h_0$ gilt

$$\|E_{h,M}^k(x) - E^k(x)\|_{L_p(G)} \leq C(h_0) h^{2-2/p} \quad \text{mit } k \in \{1, 2\}.$$

Beweis: In Analogie zum Satz 2.2.2 seien $E_{hmn}^k(x)$ und $E_{mn}^k(x)$ mit $m, n \in \{1, 2\}$ die Elemente der Matrizen $E_{h,M}^k(x)$ und $E^k(x)$ mit $k \in \{1, 2\}$. Die Norm im Raum $L_p(G)$ ist definiert durch

$$\|E_{h,M}^k(x) - E^k(x)\|_{L_p(G)}^p = \int_{x \in G} \left(\sum_{m,n=1}^2 |E_{hmn}^k(x) - E_{mn}^k(x)|^2 \right)^{p/2} dx.$$

Die Differenz der Matrixelemente kann im Distributionensinn als Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} |E_{hmn}^k(x) - E_{mn}^k(x)| &= |[Ff^l(\xi)](x)| \quad \text{mit} \\ f^l(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - e^{\pm i h \xi_l}}{h d^2} \pm \frac{\mathbf{i} \xi_l}{|\xi|^2} \right] \chi_{Q_h} + \frac{1}{2\pi} \left[\pm \frac{\mathbf{i} \xi_l}{|\xi|^2} \right] \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus Q_h}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

geschrieben werden. Dabei gilt $l = 2$ im Fall $m = n$ und $l = 1$ wenn $m \neq n$. Im folgenden wird der Fall $l = 1$ betrachtet. Es sei Γ_{Q_h} der Rand des Quadrates Q_h und $\overline{Q_h} = Q_h \cup \Gamma_{Q_h}$. Der Bezeichnungsweise von Wladimierow (siehe [Wla]) folgend, kann die erste Ableitung der Funktion $f^1 \in C^1(\overline{Q_h}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q_h})$ im Distributionensinn in der Form

$$\frac{\partial f^1}{\partial \xi_i} = \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_i} \right\} + [f^1]_{\Gamma_{Q_h}} \cos(\vec{n}, \xi_i) \chi_{\Gamma_{Q_h}} \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2\}$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet \vec{n} den äußeren Normalenvektor in den Punkten $\xi \in \Gamma_{Q_h}$, $\left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_i} \right\}$ ist der klassische Anteil der Distribution $\frac{\partial f^1}{\partial \xi_i}$ und $[f^1]_{\Gamma_{Q_h}}$ bezeichnet den Sprung von f^1 beim Durchgang durch den Rand Γ_{Q_h} von $\mathbb{R}^2 \setminus Q_h$ nach Q_h entlang des Normalenvektors \vec{n} . Das Fourierintegral der Distribution f^1 hat die Gestalt

$$\begin{aligned} F(f^1) &= [\mathbf{i}(x_1 + \mathbf{i}x_2)]^{-1} F \left(\frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right) \\ &= [\mathbf{i}(x_1 + \mathbf{i}x_2)]^{-1} \left[F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} F \left(-\frac{1 - e^{\pm i h \xi_1}}{h d^2} \cos(\vec{n}, \xi_1) \chi_{\Gamma_{Q_h}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{i}}{2\pi} F \left(-\frac{1 - e^{\pm i h \xi_1}}{h d^2} \cos(\vec{n}, \xi_2) \chi_{\Gamma_{Q_h}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Untersucht wird zunächst der Term $\left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\}$, indem er in zwei Summanden zerlegt wird.

$$\left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} = w(\xi) \chi_{Q_h} + v(\xi) \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
w(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \left[\mp \frac{\mathbf{i} e^{\pm i h \xi_1}}{d^2} - 2 \frac{\sin(h \xi_1)(1 - e^{\pm i h \xi_1})}{h^2 d^4} \pm \frac{\mathbf{i}}{|\xi|^2} \mp \frac{2\mathbf{i} \xi_1^2}{|\xi|^4} \right. \\
&\quad \left. - 2\mathbf{i} \frac{\sin(h \xi_2)(1 - e^{\pm i h \xi_1})}{h^2 d^4} \pm \frac{2\xi_1 \xi_2}{|\xi|^4} \right] \quad \text{und} \\
v(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \left[\pm \frac{\mathbf{i}}{|\xi|^2} \mp \frac{2\mathbf{i} \xi_1^2}{|\xi|^4} \pm \frac{2\xi_1 \xi_2}{|\xi|^4} \right].
\end{aligned}$$

Außerhalb des Quadrates Q_h gilt

$$\int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} |v(\xi)|^{p_1} d\xi \leq C_1 \int_{r=\pi/h}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^{-2p_1+1} d\varphi dr \leq C_2 h^{2p_1-2} \quad \text{für } p_1 > 1,$$

während innerhalb von Q_h mit Hilfe der Ungleichung $|w(\xi)| \leq C h |\xi|^{-1}$ die Beziehung

$$\int_{\xi \in Q_h} |w(\xi)|^{p_1} d\xi \leq C_3 h^{2p_1-2} \quad \text{für } p_1 < 2$$

bewiesen werden kann. Aus beiden Abschätzungen folgt

$$\left\| \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C h^{2-2/p_1} \quad \text{für } 1 < p_1 < 2.$$

Mit Hilfe des Satzes von Hausdorff/Young (siehe [Hoe]) kann das Fourierintegral des Ausdrucks $\left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\}$ abgeschätzt werden durch

$$\left\| F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_{q_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\| \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C h^{2-2/p_1}, \quad (2.4)$$

wenn $q_1 > 2$ und $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$. Auf Grund der Hölderungleichung gilt in jedem beschränkten Gebiet $G \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\left\| [\mathbf{i}(x_1 + \mathbf{i}x_2)]^{-1} F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_p(G)} \\
&\leq \| |x_1 + \mathbf{i}x_2|^{-p} \|_{L_{p_2}(G)}^{1/p} \left\| F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_{q_2}(G)}^p \| \cdot \|_{L_{q_2}(G)}^{1/p}
\end{aligned} \quad (2.5)$$

mit $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$. Der erste Faktor in Ungleichung (2.5) ist beschränkt, wenn gilt $pp_2 < 2$.

(Aus Übersichtsgründen sei vermerkt, dass im Fall $q_2 > 3$ gilt

$$pp_2 = p \frac{q_2}{q_2 - 1} = p + \frac{p}{q_2 - 1} < \frac{4}{3} + \frac{4/3}{2} = 2 \quad \text{und} \quad pq_2 > 1 \cdot 3 > 2.)$$

Es sei $q_1 = pq_2 > 2$. Aus den Ungleichungen (2.4) und (2.5) folgt somit

$$\begin{aligned} \left\| [\mathbf{i}(x_1 + \mathbf{i}x_2)]^{-1} F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_p(G)} &\leq C \left\| F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_{q_1}(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C h^{2-2/p_1} \end{aligned}$$

für $1 < p_1 < 2$ und $q_1 > 2$. Basierend auf der Ungleichung $\frac{1}{p} = \frac{1}{pp_2} + \frac{1}{pq_2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{q_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{p_1}$ kann man $p = p_1$ für alle p mit $1 < p < 4/3$ wählen. Sowohl an dieser Stelle als auch in der Bemerkung zum Fall $q_2 > 3$ spielt also die im Satz formulierte obere Grenze für p eine wesentliche Rolle. Man erhält die Abschätzung

$$\left\| [\mathbf{i}(x_1 + \mathbf{i}x_2)]^{-1} F \left\{ \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} + \mathbf{i} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} \right\} \right\|_{L_p(G)} \leq C h^{2-2/p} \quad (2.6)$$

mit $1 < p < 4/3$. Zu untersuchen bleibt die L_p -Norm der letzten zwei Summanden in Gleichung (2.3). Das Fourierintegral kann in der Form

$$\begin{aligned} \|I^{(h)}\|_{L_p(G)} &= \left\| |x_1 + \mathbf{i}x_2|^{-1} \left| \frac{1}{2\pi} F \left(-\frac{1 - e^{\pm \mathbf{i}h\xi_1}}{hd^2} \cos(\vec{n}, \xi_1) \chi_{\Gamma_{Q_h}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mathbf{i}}{2\pi} F \left(-\frac{1 - e^{\pm \mathbf{i}h\xi_1}}{hd^2} \cos(\vec{n}, \xi_2) \chi_{\Gamma_{Q_h}} \right) \right\|_{L_p(G)} \quad (2.7) \\ &= \left\| \frac{\mathbf{i}h}{|x_1 + \mathbf{i}x_2|} \left| \frac{\sin(x_1\pi/h)}{(2\pi)^2} \int_{\xi_2=-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-\mathbf{i}x_2\xi_2}}{1 + \sin^2(h\xi_2/2)} d\xi_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mathbf{i} \sin(x_2\pi/h)}{2(2\pi)^2} \int_{\xi_1=-\pi/h}^{\pi/h} \frac{1 - e^{\pm \mathbf{i}h\xi_1}}{\sin^2(h\xi_1/2) + 1} e^{-\mathbf{i}x_1\xi_1} d\xi_1 \right\|_{L_p(G)} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Im weiteren sei $G_1 = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a \text{ und } |x_2| < b\}$ das kleinste Rechteck, welches das Gebiet G überdeckt. Mit Hilfe der Substitution $I^{(h/t)}(x_1, x_2) = t I^{(h)}(tx_1, tx_2)$ folgt für $t \geq 1$

$$\|I^{(h/t)}\|_{L_p(G_1)}^p = t^{p-2} \|I^{(h)}\|_{L_p(tG_1)}^p = t^{p-2} [\|I^{(h)}\|_{L_p(G_1)}^p + \|I^{(h)}\|_{L_p(tG_1 \setminus G_1)}^p].$$

Im Spezialfall $h_0 = ht > h$ erhält man

$$\begin{aligned} \|I^{(h)}\|_{L_p(G)}^p &\leq \|I^{(h)}\|_{L_p(G_1)}^p = \|I^{(h_0/t)}\|_{L_p(G_1)}^p \\ &\leq t^{(p-2)} [\|I^{(h_0)}\|_{L_p(G_1)}^p + \|I^{(h_0)}\|_{L_p(\mathbb{R}^2 \setminus G_1)}^p]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Untersucht wird zunächst die Norm $\|I^{(h_0)}\|_{L_p(\mathbb{R}^2 \setminus G_1)}^p$. Dazu wird das Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus G_1$ unterteilt in $A_1 = \{(x_1, x_2) : |x_1| \geq a, |x_2| \geq b\}$, $A_2 = \{(x_1, x_2) : |x_1| \geq a, |x_2| < b\}$ und $A_3 = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, |x_2| \geq b\}$. Betrachtet wird zuerst das Teilgebiet A_1 . Mit

Hilfe der partiellen Integration bezüglich ξ_2 kann das erste Integral in Gleichung (2.7) in der Form

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathbf{i} h_0}{|x_1 + \mathbf{i} x_2|} \left| \frac{\sin(x_1 \pi / h_0)}{(2\pi)^2} \int_{\xi_2 = -\pi/h_0}^{\pi/h_0} \frac{e^{-\mathbf{i} x_2 \xi_2}}{1 + \sin^2(h_0 \xi_2 / 2)} d\xi_2 \right| \right\|_{L_p(A_1)}^p \\ & \leq C_1(h_0) \int_{x_1=a}^{\infty} \int_{x_2=b}^{\infty} \left(\frac{1}{x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^p dx_2 dx_1 \leq C_2(h_0) \quad \text{für } p > 1 \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Durch partielle Integration bezüglich ξ_1 schätzt man das zweite Integral in (2.7) ab. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathbf{i} h_0}{|x_1 + \mathbf{i} x_2|} \left| \frac{\sin(x_2 \pi / h_0)}{2(2\pi)^2} \int_{\xi_1 = -\pi/h_0}^{\pi/h_0} \frac{(1 - e^{\pm \mathbf{i} h_0 \xi_1}) e^{-\mathbf{i} x_1 \xi_1}}{\sin^2(h_0 \xi_1 / 2) + 1} d\xi_1 \right| \right\|_{L_p(A_1)}^p \\ & \leq C_3(h_0) \int_{x_1=a}^{\infty} \int_{x_2=b}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^p dx_2 dx_1 \leq C_4(h_0) \quad \text{für } p > 1. \end{aligned}$$

Für das Teilgebiet A_2 erhält man die Ungleichung

$$\|I^{(h_0)}\|_{L_p(A_2)}^p \leq C_5 \int_{x_1=a}^{\infty} \int_{x_2=0}^b \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^p dx_2 dx_1 \leq C_6 \quad \text{für } p > 1$$

und für das Teilgebiet A_3 gilt

$$\|I^{(h_0)}\|_{L_p(A_3)}^p \leq C_7 \int_{x_1=0}^a \int_{x_2=b}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^p dx_2 dx_1 \leq C_8, \quad \text{wenn } p > 1.$$

Zusammengefasst resultiert somit aus der Beziehung (2.8)

$$\|I^{(h)}\|_{L_p(G)}^p \leq h_0^{(p-2)} h^{-p+2} [\|I^{(h_0)}\|_{L_p(G_1)}^p + C_9(h_0)], \quad \text{wenn } p > 1. \quad (2.9)$$

Im folgenden sei K ein Kreis mit Radius R , der das Gebiet G_1 überdeckt. Der Summand $\|I^{(h_0)}\|_{L_p(G_1)}^p$ auf der rechten Seite der Ungleichung (2.9) kann unter Verwendung von (2.7) in der Form

$$\|I^{(h_0)}\|_{L_p(G_1)}^p \leq C_{10} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^{-p+1} d\varphi dr \leq C_{11} \quad \text{für } p < 2 \quad (2.10)$$

abgeschätzt werden. Dabei sind h durch h_0 und G durch K zu ersetzen. Insgesamt erhält man aus den Beziehungen (2.3), (2.6), (2.7), (2.9) und (2.10) im Fall $l = 1$ und $1 < p < 4/3$ die Ungleichung

$$\|Ff^l(\xi)(x)\|_{L_p(G)} \leq C_\alpha h^{2-2/p} + C_\beta h^{-1+2/p} \leq C_\gamma h^{2-2/p}$$

mit den aus der obigen Rechnung resultierenden Konstanten C_α , C_β und C_γ , die abhängig von h_0 aber unabhängig von h sind. Man beachte dabei, dass die Ungleichung $2 - 2/p < -1 + 2/p$ nur im Fall $p < 4/3$ gilt. Der Beweis kann unmittelbar auf den Fall $l = 2$ übertragen werden. Hier gelangt man durch die entsprechenden Abschätzungen zur gleichen Konvergenzordnung. Schließlich folgt aus (2.2), der Definition der Matrixnorm und der Minkowskischen Ungleichung das Endresultat

$$\begin{aligned} \|E_{h,M}^k(x) - E^k(x)\|_{L_p(G)} &\leq \left\| \sum_{m,n=1}^2 |E_{h,mn}^k(x) - E_{mn}^k(x)| \right\|_{L_p(G)} \\ &\leq C h^{2-2/p} \quad \text{im Fall} \quad 1 < p < 4/3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Alle Grundlagen zur Definition rechtsinverser Operatoren im Sinne einer Faltung sind nun bereitgestellt und wurden ausführlich diskutiert.

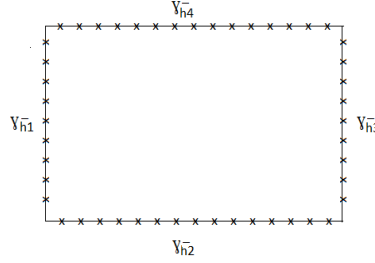
2.3 Rechtsinverser Operator und die diskrete Borel-Pompeiu-Formel

Mit den eingeführten diskreten Cauchy-Riemann-Operatoren und den zugehörigen diskreten Fundamentallösungen ist es analog zum kontinuierlichen Fall möglich, rechtsinverse Operatoren zu konstruieren. Der Idee $I - TD$ aus dem Kontinuierlichen folgend, wobei T den rechtsinversen Operator beschreibt, soll auch in der diskreten Theorie ein Randoperator konstruiert werden. Auf diese Weise besteht die Chance, ein diskretes Cauchyintegral zu definieren.

Im Abschnitt 2.3.1 wird ein rechtsinverser Operator $T_{h,M}^1$ zu dem im Abschnitt 2.2.2 definierten Operator $D_{h,M}^1$ eingeführt und dessen Eigenschaften studiert. Auf der Grundlage beider Operatoren ist es möglich, im Abschnitt 2.3.2 den Randoperator zu beschreiben und die Gültigkeit der diskreten Borel-Pompeiu Formel zu beweisen. Die in den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 vorgestellten Operatoren sind bereits in den Arbeiten [GH3] und [Ho1] betrachtet worden, wo auch deren Eigenschaften untersucht wurden. Eine Borel-Pompeiu Formel wird auch für den Operator D^{1h} und den dazugehörigen rechtsinversen Operator T^{1h} angegeben. Im Abschnitt 2.3.3 wird der Zusammenhang zwischen dem diskreten Analogon zum Cauchyintegral und dem diskreten Doppelschichtpotential (siehe [Ho]) herausgearbeitet. Darüber hinaus werden die Eigenschaften des Operators auf dem Rand genauer analysiert und es kann ein Eindeutigkeitssatz zur Lösung eines diskreten Cauchy-Riemann-Problems formuliert werden.

2.3.1 Konstruktion eines rechtsinversen Operators

Betrachtet wird ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und es sei $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2)$ das zugehörige diskrete Gebiet. Ferner sei $K = \{k_1 = (1, 0), k_2 = (0, 1), k_3 = (-1, 0) \text{ und } k_4 = (0, -1)\}$. Der Rand des diskreten Gebietes (als Menge der Randgitterpunkte) wird definiert durch $\gamma_h^- = \{rh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : \exists k_i \text{ mit } (r + k_i)h \in G_h, i = 1, \dots, 4\}$. Er kann in die Teilränder $\gamma_{hi}^- = \{rh \in \gamma_h^- : (r + k_i)h \in G_h, i = 1, \dots, 4\}$ zerlegt werden. Dies soll für den Fall eines Rechtecks in der folgenden Abbildung verdeutlicht werden.



Zusätzlich seien $\Gamma_{sj} = \{lh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus \{G_h \cup \gamma_h^-\} : (l + k_j)h \in \gamma_{hs}^- \text{ und } (l + k_s)h \in \gamma_{hj}^-\}$ mit $s, j \in \{1, \dots, 4\}$ Außenecken. Diese Außenecken werden zur Beschreibung diskreter Tangentialableitungen benötigt. Als diskretes Analogon zum komplexen T -Operator wird definiert

$$(T_{h,M}^1 f)(m) = ((T_{h1}^{1M} f)(m), (T_{h2}^{1M} f)(m))^T.$$

Die Komponenten des Operators $T_{h,M}^1$ haben die Gestalt

$$(T_{hk}^{1M} f)(m) = (T_{hk}^{1,G} f)(m) + (T_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m),$$

mit

$$(T_{hk}^{1,G} f)(m) = \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} (T_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m) &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei bei der Vereinigung von Teilrändern γ_{hi}^- , $i = 1, \dots, 4$ die Innenecken nur einmal gezählt werden und die vier Matrixelemente E_{hki}^1 die Fundamentallösung $E_{h,M}^1$ aus dem Abschnitt 2.2.2 repräsentieren. In den Außenecken werden die Randwerte Null gesetzt, da diese Ecken bei der Bearbeitung diskreter Cauchy-Riemann-Probleme in Innengebieten keine Rolle spielen. Bei den folgenden Betrachtungen

ist es jedoch notwendig, auf diese Außenecken zuzugreifen. Um dabei mit definierten Werten in den betreffenden Gitterpunkten arbeiten zu können, ist das Nullsetzen erforderlich.

Satz 2.3.1 Für Funktionen $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ mit $m \in G_h$ gilt

$$D_{h,M}^1(T_{h,M}^1 f)(m) = f(m).$$

Beweis: Ausgehend von der Eigenschaft

$$D_{h,M}^1 E_{h,M}^1(m-l) = I_2 \delta_h(m-l) \quad \text{mit}$$

$$E_{h,M}^1(m-l) = \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) & E_{h12}^1(m-l) \\ E_{h21}^1(m-l) & E_{h22}^1(m-l) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \delta_h(m-l) = \begin{cases} h^{-2} & m=l \\ 0 & m \neq l \end{cases}$$

erhält man

$$\begin{aligned} & D_h^{-2}(T_{h1}^{1,G} f)(m) + D_h^1(T_{h2}^{1,G} f)(m) \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \left\{ D_h^{-2} \left[\begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) \\ E_{h12}^1(m-l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \right] + D_h^1 \left[\begin{pmatrix} E_{h21}^1(m-l) \\ E_{h22}^1(m-l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \right] \right\} \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} D_h^{-2} \\ D_h^1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) & E_{h12}^1(m-l) \\ E_{h21}^1(m-l) & E_{h22}^1(m-l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \left[\begin{pmatrix} D_h^{-2} \\ D_h^1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) & E_{h12}^1(m-l) \\ E_{h21}^1(m-l) & E_{h22}^1(m-l) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} \delta_h(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} = \begin{cases} f_0(m) & \forall m \in G_h \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

In Analogie gilt

$$\begin{aligned} & D_h^{-2}(T_{h1}^{1,\gamma_h^-} f)(m) + D_h^1(T_{h2}^{1,\gamma_h^-} f)(m) \\ &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} \delta_h(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} + \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} \delta_h(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} f_0(m) & \forall m \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise zeigt man

$$\begin{aligned} & -D_h^{-1}(T_{h1}^{1M} f)(m) + D_h^2(T_{h2}^{1M} f)(m) \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_h(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ & \quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_h(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_h(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} f_1(m) & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung: Für den Beweis der Rechtsinvertierbarkeit des Operators $T_{h,M}^1$ ist offensichtlich der Summand $T_{hk}^{1,G} f$ mit $k = 1, 2$ ausreichend. Der Summand $T_{hk}^{1,\gamma_h^-} f$ wurde hinzugefügt, um die folgenden Eigenschaften, speziell die diskrete Borel-Pompeiu-Formel, beweisen zu können.

Im Diskreten gilt zusätzlich auf Teilen des Randes die folgende Aussage:

Folgerung 2.3.1 *Werden nicht nur Gitterpunkte $m \in G_h$, sondern auch Randpunkte betrachtet, dann gilt*

$$D_h^{-2}(T_{h1}^{1M} f)(m) + D_h^1(T_{h2}^{1M} f)(m) = f_0(m)$$

für alle $m \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}$ und

$$-D_h^{-1}(T_{h1}^{1M} f)(m) + D_h^2(T_{h2}^{1M} f)(m) = f_1(m)$$

für alle $m \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}$.

Die nun folgende Eigenschaft ist im kontinuierlichen Fall trivial, in der diskreten Theorie aber nur auf der Grundlage von Folgerung 2.3.1 zu erhalten.

Satz 2.3.2 *Für Funktionen $f(m)$ mit $m \in G_h \cup \gamma_h^-$ gilt*

$$(T_{h,M}^1[D_{h,M}^1(T_{h,M}^1 f)])(m) = (T_{h,M}^1 f)(m).$$

Beweis: Mit Hilfe von Folgerung 2.3.1 erhält man unter Beachtung der Werte in den inneren Gitterpunkten sowie den teilweise zu summierenden Werten in den Randgitterpunkten

$$\begin{aligned} & (T_{hk}^{1M} \{D_h^{-2}T_{h1}^{1M} f + D_h^1T_{h2}^{1M} f, -D_h^{-1}T_{h1}^{1M} f + D_h^2T_{h2}^{1M} f\})(m) \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (D_h^{-2}T_{h1}^{1M}[f_0, f_1] + D_h^1T_{h2}^{1M}[f_0, f_1])(l) \\ (-D_h^{-1}T_{h1}^{1M}[f_0, f_1] + D_h^2T_{h2}^{1M}[f_0, f_1])(l) \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (D_h^{-2}T_{h1}^{1M}[f_0, f_1] + D_h^1T_{h2}^{1M}[f_0, f_1])(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ (-D_h^{-1}T_{h1}^{1M}[f_0, f_1] + D_h^2T_{h2}^{1M}[f_0, f_1])(l) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &= (T_{hk}^{1M} f)(m) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.2 Konstruktion eines diskreten Cauchy-Integrals

Auf der Grundlage des rechtsinversen Operators $T_{h,M}^1$ ist es möglich, die folgende Borel-Pompeiu-Formel zu beweisen. Auf den Teilrändern γ_{hj}^- , $j = 1, \dots, 4$ definiert man die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren und bildet die Matrizen $\begin{pmatrix} n_1^j & n_2^j \\ n_3^j & n_4^j \end{pmatrix}$, die wieder auf dem Homomorphismus zu komplexen Zahlen beruhen. Es gilt $\begin{pmatrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_3^1 & n_4^1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} n_1^3 & n_2^3 \\ n_3^3 & n_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n_1^2 & n_2^2 \\ n_3^2 & n_4^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} n_1^4 & n_2^4 \\ n_3^4 & n_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ferner wird der Randoperator

$$(F_{h,M}^1 f)(m) = ((F_{h1}^{1M} f)(m), (F_{h2}^{1M} f)(m))^T$$

mit der komponentenweisen Darstellung

$$(F_{hk}^{1M} f)(m) = (F_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m) + (F_{hk}^{1,*} f)(m), \quad k \in \{1, 2\}$$

betrachtet. Dabei gilt

$$(F_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m) = \sum_{j=1}^4 \sum_{l \in \gamma_{hj}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^j & n_2^j \\ n_3^j & n_4^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die imaginäre Zahl \mathbf{i} repräsentiert und auf Grund der Nichtkommutativität der Matrizen genau an dieser Stelle stehen muss. Der Operator $F_{hk}^{1,*}$ wird wie folgt eingeführt:

$$\begin{aligned} & (F_{hk}^{1,*} f)(m) \\ := & - \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^4 & n_2^1 + n_2^4 \\ n_3^1 + n_3^4 & n_4^1 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ & - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} h \begin{pmatrix} 0 \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 + n_1^3 & n_2^2 + n_2^3 \\ n_3^2 + n_3^3 & n_4^2 + n_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ & - \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^2 & n_2^1 + n_2^2 \\ n_3^1 + n_3^2 & n_4^1 + n_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & - \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^3 + n_1^4 & n_2^3 + n_2^4 \\ n_3^3 + n_3^4 & n_4^3 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bei der Summation handelt es sich stets um eine Kombination von Innenecken.

Im folgenden steht die diskrete Borel-Pompeiu-Formel und deren ausführlicher Beweis im Mittelpunkt. Der hier vorgestellte Beweis wurde in seiner ersten Fassung im Preprint [GH1] veröffentlicht.

Satz 2.3.3 *Die Borel-Pompeiu-Formel hat in den Komponenten $k = 1$ und $k = 2$ die Gestalt*

$$(T_{hk}^{1M}(D_{h,M}^1 f))(m) + (F_{hk}^{1M} f)(m) = f_{k-1}(m) \chi_{k-1}$$

$$\text{mit den charakteristischen Funktionen } \chi_0 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h2}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } \chi_1 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Im Spezialfall $m \in G_h$ gilt

$$(T_{h,M}^1(D_{h,M}^1 f))(m) + (F_{h,M}^1 f)(m) = f(m).$$

Damit ist die Grundlage für die Definition eines diskreten Analogons zum Cauchy-Integral geschaffen. Ist $f(m)$ eine diskret holomorphe Funktion (mit der Eigenschaft $D_{h,M}^1 f(m) = 0$), so kann diese Funktion allein durch die Werte in den Randgitterpunkten beschrieben werden. Dies ist besonders auch für numerische Berechnungen ein ganz entscheidender Aspekt.

Beweis: Betrachtet wird zunächst der mit dem rechtsinversen Operator verbundene Ausdruck

$$\begin{aligned} S_1 &= (T_{hk}^{1,G}[D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0, D_h^2 f_1])(m) \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^{-2} f_0(l) + D_h^1 f_1(l) \\ -D_h^{-1} f_0(l) + D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite wird in vier Teilsummen entsprechend den vier Differenzenableitungen unterteilt und jede der Teilsummen wird weiter umgeformt. Die Vorgehensweise wird anhand der ersten Teilsumme demonstriert.

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in G_h} h^2 E_{hk1}^1(m-l) D_h^{-2} f_0(l) \\ &= \sum_{l \in G_h} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) - \sum_{l \in G_h} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l+k_4) \\ &= \sum_{l \in G_h} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) - \sum_{l \in G_h \cup \gamma_{h2}^- \setminus \gamma_{h4}^+} h E_{hk1}^1((m+k_4)-l) f_0(l) \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^{-2} E_{hk1}^1(m-l)] f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) f_0(l) \\ & \quad + \sum_{l \in \gamma_{h4}^+} h E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) f_0(l). \end{aligned}$$

Dabei wird mit γ_{hi}^+ immer die Schicht der Gitterpunkte aus G_h bezeichnet, die unmittelbar an den Teilrand γ_{hi}^- angrenzt. Als erstes Zwischenergebnis erhält man

$$\begin{aligned}
S_1 = & \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^{-2} E_{hk1}^1(m-l) - D_h^{-1} E_{hk2}^1(m-l)] f_0(l) \\
& + \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^1 E_{hk1}^1(m-l) + D_h^2 E_{hk2}^1(m-l)] f_1(l) \\
& - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h4}^+} h E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) f_0(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h E_{hk1}^1(m-(l+k_3)) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h1}^+} h E_{hk1}^1(m-(l+k_3)) f_1(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h E_{hk2}^1(m-(l+k_1)) f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h3}^+} h E_{hk2}^1(m-(l+k_1)) f_0(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h E_{hk2}^1(m-(l+k_4)) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^+} h E_{hk2}^1(m-(l+k_4)) f_1(l)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation zeigt man im Fall $k = 1$

$$F_h D_h^{-1} E_{h12}^1(m) = \xi_1^h F_h E_{h12}^1(m) = -\frac{\xi_1^h \xi_{-1}^h}{2\pi d^2} = \xi_{-1}^h F_h E_{h21}^1(m) = -F_h D_h^1 E_{h21}^1(m),$$

wobei wie im Abschnitt 2.2.2 $\xi_{-j}^h = h^{-1}(1 - e^{-ih\xi_j})$ und $\xi_j^h = h^{-1}(1 - e^{ih\xi_j})$ für $j \in \{1, 2\}$ gilt. Analog erhält man

$$F_h D_h^1 E_{h11}^1(m) = -\xi_{-1}^h F_h E_{h11}^1(m) = -\frac{\xi_{-1}^h \xi_{-2}^h}{2\pi d^2} = \xi_{-2}^h F_h E_{h12}^1(m) = -F_h D_h^2 E_{h12}^1(m).$$

Mittels Rücktransformation folgt unter Verwendung der Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^{-2} E_{h11}^1(m-l) - D_h^{-1} E_{h12}^1(m-l)] f_0(l) \\
& + \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^1 E_{h11}^1(m-l) + D_h^2 E_{h12}^1(m-l)] f_1(l) \\
= & \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^{-2} E_{h11}^1(m-l) + D_h^1 E_{h21}^1(m-l)] f_0(l) \\
& + \sum_{l \in G_h} h^2 [-D_h^2 E_{h12}^1(m-l) + D_h^1 E_{h12}^1(m-l)] f_1(l) \\
= & \sum_{l \in G_h} h^2 \delta_h(m-l) f_0(l) = f_0(m) \chi_{G_h},
\end{aligned}$$

wobei allgemein $\chi_A = \begin{cases} 1 & \forall m \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gelten soll. Im Fall $k = 2$ resultiert aus $F_h D_h^{-2} E_{h21}^1(m) = F_h D_h^{-1} E_{h22}^1(m)$ und $F_h D_h^2 E_{h22}^1(m) = F_h D_h^1 E_{h11}^1(m)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^{-2} E_{h21}^1(m-l) - D_h^{-1} E_{h22}^1(m-l)] f_0(l) \\
& + \sum_{l \in G_h} h^2 [D_h^1 E_{h21}^1(m-l) + D_h^2 E_{h22}^1(m-l)] f_1(l) \\
& = \sum_{l \in G_h} h^2 \delta_h(m-l) f_1(l) = f_1(m) \chi_{G_h}.
\end{aligned}$$

Somit erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}
S_1 &= f_{k-1}(m) \chi_{G_h} \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m - (l + k_2)) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h4}^+} h E_{hk1}^1(m - (l + k_2)) f_0(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h E_{hk1}^1(m - (l + k_3)) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h1}^+} h E_{hk1}^1(m - (l + k_3)) f_1(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h E_{hk2}^1(m - (l + k_1)) f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h3}^+} h E_{hk2}^1(m - (l + k_1)) f_0(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h E_{hk2}^1(m - (l + k_4)) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^+} h E_{hk2}^1(m - (l + k_4)) f_1(l).
\end{aligned}$$

Zum Ausdruck S_1 wird nun der Hilfstern S_2 addiert mit

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -D_h^{-1} f_0(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \notin \gamma_{h2}^- \cap (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l+k_3) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \notin \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^1 f_1(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- : (l+k_4) \in \gamma_{h1}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^{-2} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- \sum_{l \notin \gamma_{h1}^- \cap (l+k_4) \in \gamma_{h1}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l+k_4) + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- : (l+k_4) \notin \gamma_{h1}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -D_h^{-1} f_0(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h3}^- : (l+k_2) \in \gamma_{h3}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \notin \gamma_{h3}^- \cap (l+k_2) \in \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_1(l+k_2) - \sum_{l \in \gamma_{h3}^- : (l+k_2) \notin \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_1(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^{-2} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h4}^- : (l+k_1) \in \gamma_{h4}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^1 f_1(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \sum_{l \notin \gamma_{h4}^- \cap (l+k_1) \in \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-l)f_1(l+k_1) - \sum_{l \in \gamma_{h4}^- : (l+k_1) \notin \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-l)f_1(l).
\end{aligned}$$

Den Ausdruck S_2 gilt es weiter umzuformen. Die Vorgehensweise wird anhand der ersten vier Summanden demonstriert, die sich auf den Teilrand γ_{h2}^- beziehen.

$$\begin{aligned}
S_2^{\gamma_{h2}^-} &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -D_h^{-1} f_0(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \notin \gamma_{h2}^- \cap (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l+k_3) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \notin \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 E_{hk2}^1(m-l) D_h^2 f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l+k_3) + \sum_{l \notin \gamma_{h2}^- \cap (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l+k_3) \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \notin \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 E_{hk2}^1(m-l) D_h^2 f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) \\
&+ \sum_{(l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l+k_3) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_1(l+k_2) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_1(l) \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1((m+k_3)-l)f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h2}^+} hE_{hk2}^1(m-(l+k_4))f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_1(l) \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 D_h^{-1} E_{hk2}^1(m-l)f_0(l).
\end{aligned}$$

Für den letzten Summanden ergibt sich im Fall $k = 1$ auf Grund der Beziehung $F_h D_h^2 E_{hk2}^1(m) = F_h D_h^{-2} E_{hk1}^1(m)$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 D_h^{-1} E_{h12}^1(m-l) f_0(l) \\
& = \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 \left[\delta_h(m-l) - D_h^2 E_{h22}^1(m-l) \right] f_0(l) \\
& = f_0(m) \chi_{\gamma_{h2}^-} - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h11}^1(m-l) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h11}^1((m+k_4)-l) f_0(l) \\
& = f_0(m) \chi_{\gamma_{h2}^-} - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h11}^1(m-l) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h11}^1(m-(l+k_2)) f_0(l).
\end{aligned}$$

Im Fall $k=2$ erhält man auf Grund von $F_h D_h^{-1} E_{h22}^1(m) = F_h D_h^{-2} E_{h21}^1(m)$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 D_h^{-1} E_{h22}^1(m-l) f_0(l) = - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 D_h^{-2} E_{h21}^1(m-l) f_0(l) \\
& = - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h21}^1(m-l) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{h21}^1(m-(l+k_2)) f_0(l).
\end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned}
S_2^{\gamma_{h2}^-} & = \sum_{l \in \gamma_{h2}^+} h E_{hk2}^1(m-(l+k_4)) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_1(l) \\
& + f_0(m) \chi_{\gamma_{h2}^-}^{k=1} - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) f_0(l)
\end{aligned}$$

mit $\chi_{\gamma_{hi}^-}^{k=j} = \begin{cases} 1 & \forall m \in \gamma_{hi}^- \text{ im Fall } k=j, \quad i \in \{1, \dots, 4\}, \quad j \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Durch analoges Umformen der Ausdrücke auf den anderen Teilrändern und der Tatsache, dass sich Summanden mit denen von S_1 zu Null ergänzen, folgt

$$\begin{aligned}
S_3 & = S_1 + S_2 \\
& = f_{k-1}(m) \chi_{G_h} + f_0(m) \chi_{\gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^-}^{k=2} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h4}^-}^{k=2} \\
& - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_1(l) \\
& - \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_1(l) + \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_1(l) - \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l) \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_1(l).
\end{aligned}$$

Die übrig bleibenden Summanden werden geeignet zusammengefaßt. Die Vorgehensweise wird anhand des Teilrandes γ_{h2}^- gezeigt, wobei der Homomorphismus zwischen

komplexen Zahlen und Matrizen eine wesentliche Rolle spielt.

$$\begin{aligned}
& -\sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk1}^1(m-l) f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_1(l) \\
&= -\sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\
&= -\sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 & n_2^2 \\ n_3^2 & n_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach dem Umformen der Ausdrücke auf den restlichen Teilrändern erhält man als erstes Teilergebnis

$$\begin{aligned}
& S_1 + S_2 \\
&= f_{k-1}(m) \chi_{k-1} + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} \\
&\quad - \sum_{j=1}^4 \sum_{l \in \gamma_{hj}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^j & n_2^j \\ n_3^j & n_4^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \quad (2.11) \\
&= f_{k-1}(m) \chi_{k-1} + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} - (F_{hk}^{1, \gamma_h^-} f)(m),
\end{aligned}$$

wobei $\chi_0 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h2}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $\chi_1 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Betont sei, daß sich in den Innenecken des Gebietes jeweils zwei Normalenvektoren überlagern.

Im letzten Teil des Beweises wird S_2 noch einmal untersucht, um die entsprechenden Anteile dem rechtsinversen Operator beziehungsweise dem Randoperator zuzuordnen zu können. Um Tangentialableitungen betrachten zu können, setzt man wie eingangs erläutert in den Außenecken $f_0(m) = f_1(m) = 0$. Wie die einzelnen Summanden umgeschrieben werden, soll anhand der Teilsumme $S_2^{\gamma_{h2}^-}$ in ihrer ursprünglichen Form demonstriert werden. Für den dritten Summanden von $S_2^{\gamma_{h2}^-}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \notin \gamma_{h2}^- \cap (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l+k_3) \\
&= \sum_{l \in G_h \cap (l+k_3) \in \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l+k_3) - \sum_{l \in \Gamma_{23}} h^2 E_{hk2}^1(m-l) D_h^{-1} f_0(l) \quad (2.12) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-(l+k_1)) f_0(l) - \sum_{l \in \Gamma_{23}} h^2 E_{hk2}^1(m-l) D_h^{-1} f_0(l).
\end{aligned}$$

Für den vierten Summanden von $S_2^{\gamma_{h2}^-}$ nutzt man die Schreibweise

$$-\sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \notin \gamma_{h2}^-} h E_{hk2}^1(m-l) f_0(l) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \Gamma_{12}} hE_{hk2}^1(m-l)[f_0(l) - f_0(l+k_3)] \\
&= - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in \Gamma_{12}} h^2 E_{hk2}^1(m-l)D_h^{-1}f_0(l).
\end{aligned}$$

Aus (2.12) und (2.13) resultiert unter Beachtung der Gleichheit der Mengen $\{l \in \gamma_{h2}^- : (l+k_3) \in (\gamma_{h2}^- \cup \Gamma_{12})\} = \{l \in \gamma_{h2}^- \setminus (\gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-)\}$

$$\begin{aligned}
S_2^{\gamma_{h2}^-} &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{(l \in \gamma_{h2}^- \setminus (\gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-)) \cup (l \in \Gamma_{23})} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -D_h^{-1} f_0(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-(l+k_1))f_0(l) - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)f_0(l).
\end{aligned}$$

Faßt man die Summanden auf den Teilrändern γ_{h2}^- und γ_{h3}^- sowie γ_{h1}^- und γ_{h4}^- zusammen, so ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -D_h^{-1} f_0(l) + D_h^2 f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^-} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_h^{-2} f_0(l) + D_h^1 f_1(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)[f_0(l) + f_1(l)] \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-l)[f_0(l) - f_1(l)] \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-(l+k_1))f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk2}^1(m-(l+k_4))f_1(l) \\
&- \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} hE_{hk1}^1(m-(l+k_2))f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-(l+k_3))f_1(l) \\
&+ \sum_{l \in \Gamma_{23}} h^2 E_{hk2}^1(m-l)[-D_h^{-1} f_0(l) + D_h^2 f_1(l)] \\
&+ \sum_{l \in \Gamma_{14}} h^2 E_{hk1}^1(m-l)[D_h^{-2} f_0(l) + D_h^1 f_1(l)].
\end{aligned}$$

Bei den ersten zwei Summanden werden die Innenecken nur einmal gezählt. (Beispielsweise wird beim Zusammenfassen der Ausdrücke auf γ_{h2}^- und γ_{h3}^- die Menge $\{l : l \in \gamma_{h2}^-\}$ mit der Menge $\{l : l \in \gamma_{h3}^- \setminus (\gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-)\}$ vereinigt.)

Offensichtlich erhält man so für S_2 die Darstellung

$$S_2 = (T_{hk}^{1, \gamma_h^-} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} hE_{hk2}^1(m-l)[f_0(l) + f_1(l)] \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-l)[f_0(l) - f_1(l)] \\
& + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} hE_{hk2}^1(m-(l+k_1))f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk2}^1(m-(l+k_4))f_1(l) \\
& - \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} hE_{hk1}^1(m-(l+k_2))f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} hE_{hk1}^1(m-(l+k_3))f_1(l),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei sich ein Anteil von S_2 dem rechtsinversen Operator zuordnen läßt. Untersucht werden nun in (2.14) die zwei Summanden mit dem Summationsindex $l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-(l+k_1)) - E_{hk1}^1(m-(l+k_2))]f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-(l+k_1)) - E_{hk2}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[-E_{hk1}^1(m-(l+k_2)) + E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) - E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1((m+k_3)-l) - E_{hk2}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[-E_{hk1}^1((m+k_4)-l) + E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) - E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h^2[-D_h^{-1}E_{hk2}^1(m-l) + D_h^{-2}E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) - E_{hk1}^1(m-l)]f_0(l).
\end{aligned}$$

Im Fall $k=1$ erhält man auf Grund von $F_h D_h^{-2}E_{h11}^1(m) = F_h D_h^2E_{h22}^1(m)$

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h^2[-D_h^{-1}E_{h12}^1(m-l) + D_h^2E_{h22}^1(m-l)]f_0(l) \\
&\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{h12}^1(m-l) - E_{h11}^1(m-l)]f_0(l) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h^2\delta_h(m-l)f_0(l) + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{h12}^1(m-l) - E_{h11}^1(m-l)]f_0(l) \\
&= f_0(m)\chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{h12}^1(m-l) - E_{h11}^1(m-l)]f_0(l).
\end{aligned}$$

Im Fall $k = 2$ ergibt sich aus der Beziehung $F_h D_h^{-1} E_{h22}^1(m) = F_h D_h^{-2} E_{h21}^1(m)$

$$S_4 = \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{h22}^1(m-l) - E_{h21}^1(m-l)] f_0(l).$$

Faßt man beide Fälle zusammen, so gilt

$$S_4 = f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) - E_{hk1}^1(m-l)] f_0(l). \quad (2.15)$$

Auf gleiche Weise kann man die Summanden von (2.14) mit dem Summationsindex $l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-$ umformen. Man erhält

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h[E_{hk2}^1(m-(l+k_4)) + E_{hk1}^1(m-(l+k_3))] f_1(l) \\ = & f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) + E_{hk1}^1(m-l)] f_1(l). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aus den Gleichungen (2.14) - (2.16) folgt auf Grund des Homomorphismus zwischen komplexen Zahlen und Matrizen

$$\begin{aligned} S_2 &= (T_{hk}^{1, \gamma_h^-} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) \\ &\quad - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} h E_{hk2}^1(m-l) [f_0(l) + f_1(l)] \\ &\quad + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} h E_{hk1}^1(m-l) [f_0(l) - f_1(l)] \\ &\quad + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) - E_{hk1}^1(m-l)] f_0(l) \\ &\quad + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h[E_{hk2}^1(m-l) + E_{hk1}^1(m-l)] f_1(l) \\ &= (T_{hk}^{1, \gamma_h^-} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) + \\ &\quad f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} \\ &\quad - \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} h \begin{pmatrix} 0 \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T_{hk}^{1,\gamma_h^-} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) \\
&\quad + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} + (F_{hk}^{1,*} f)(m).
\end{aligned}$$

Da nun alle Summanden von S_2 den Differenzenoperatoren zugeordnet sind, gilt insgesamt

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &= (T_{hk}^{1,G} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) + S_2 \\
&= (T_{hk}^{1,G} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) \\
&\quad + (T_{hk}^{1,\gamma_h^-} [D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1, -D_h^{-1} f_0 + D_h^2 f_1])(m) \\
&\quad + f_0(m) \chi_{\gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-}^{k=1} + f_1(m) \chi_{\gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-}^{k=2} + (F_{hk}^{1,*} f)(m).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus (2.11) und (2.17) folgt schließlich die Behauptung des Satzes ■

Betrachtet man noch einmal die Komponenten $T_{hk}^{1,M}$, $k \in \{1, 2\}$ des rechtsinversen Operators $T_{h,M}^1$, dann wird im Anteil $T_{hk}^{1,G}$ über alle Gitterpunkte des Gebietes summiert und der Summand hat die Ordnung h^2 , während im Summanden T_{hk}^{1,γ_h^-} bei gleichbleibender Ordnung der Schrittweite nur über Randgitterpunkte summiert wird. Diese Dimensionsreduktion ist auch beim Vergleich zwischen den Ausdrücken F_{hk}^{1,γ_h^-} und F_{hk}^{1,γ_I^-} zu beobachten. Symbolisch kann man dies durch

$$(T_{hk}^{1,M} f)(m) = (T_{hk}^{1,G} f)(m) + O(h) \quad \text{und} \quad (F_{hk}^{1,M} f)(m) = (F_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m) + O(h)$$

mit $k \in \{1, 2\}$ zum Ausdruck bringen.

Folgerung 2.3.2 *Werden nur komplexe Funktionen $f(m)$ mit $D_{h,M}^1 f(m) = 0$ für alle $m \in G_h$ betrachtet, dann folgt aus der Borel-Pompeiu Formel für die Komponenten $k = 1$ und $k = 2$*

$$(T_{hk}^{1,\gamma_h^-} (D_{h,M}^1 f))(m) + (F_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m) + (F_{hk}^{1,*} f)(m) = f_{k-1}(m) \chi_{k-1}.$$

Mittels der symbolischen Schreibweise erhält man für alle $m \in G_h$

$$(F_{h,M}^1 f)(m) = f(m) + O(h).$$

Durch die in der Folgerung angegebene symbolische Schreibweise und besonders den Anteil F_{hk}^{1,γ_h^-} im diskreten Randoperator wird die Analogie zum klassischen Cauchy-Integral deutlich. Die Eigenschaften des Cauchy-Operators werden im Abschnitt 2.3.3 genauer untersucht.

An dieser Stelle wird zunächst die Borel-Pompeiu-Formel auch für die zweite Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren bereitgestellt. Beim Beweis der Aussage wiederholen sich die Beweisschritte von Satz 2.3.3.

Betrachtet wird der rechtsinverse Operator

$$(T^{1h}f)(m) = ((T_{h1}^1f)(m), (T_{h2}^1f)(m))^T$$

mit den Komponenten

$$(T_{hk}^1f)(m) = (\tilde{T}_{hk}^{1,G}f)(m) + (\tilde{T}_{hk}^{1,\gamma_h^-}f)(m).$$

Dabei gilt, aber nun unter Verwendung der diskreten Fundamentallösung $E_h^1(m)$,

$$(\tilde{T}_{hk}^{1,G}f)(m) = \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_{hk}^{1,\gamma_h^-}f)(m) &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Analogie zur Folgerung 2.3.1 und zum Satz 2.3.2 beweist man unter Verwendung des Operators D^{1h}

$$D_h^{-1}(T_{h1}^1f)(m) - D_h^2(T_{h2}^1f)(m) = f_0(m)$$

für alle $m \in G_h \cup \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \cup \Gamma_{23}$, sowie

$$D_h^{-2}(T_{h1}^1f)(m) + D_h^1(T_{h2}^1f)(m) = f_1(m)$$

für alle $m \in G_h \cup \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{14}$ und

$$(T^{1h}[D^{1h}(T^{1h}f)])(m) = (T^{1h}f)(m).$$

Weiterhin sei der Randoperator

$$(F^{1h}f)(m) = ((F_{h1}^1f)(m), (F_{h2}^1f)(m))^T$$

mit der komponentenweisen Darstellung

$$(F_{hk}^1f)(m) = (\tilde{F}_{hk}^{1,\gamma_h^-}f)(m) + (\tilde{F}_{hk}^{1,*}f)(m)$$

definiert. Konkret gilt

$$(\tilde{F}_{hk}^{1,\gamma_h^-}f)(m) = - \sum_{j=1}^4 \sum_{l \in \gamma_{hj}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1^j & n_2^j \\ n_3^j & n_4^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
& (\tilde{F}_{hk}^{1,*} f)(m) \\
&= \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1^2 + n_1^3 & n_2^2 + n_2^3 \\ n_3^2 + n_3^3 & n_4^2 + n_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} 0 \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^4 & n_2^1 + n_2^4 \\ n_3^1 + n_3^4 & n_4^1 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^2 & n_2^1 + n_2^2 \\ n_3^1 + n_3^2 & n_4^1 + n_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1^3 + n_1^4 & n_2^3 + n_2^4 \\ n_3^3 + n_3^4 & n_4^3 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Operatoren kann in Analogie zum Satz 2.3.3 die folgende Borel-Pompeiu-Formel bewiesen werden:

In den Komponenten $k = 1$ und $k = 2$ gilt

$$(T_{hk}^1(D^{1h} f))(m) + (F_{hk}^1 f)(m) = f_{k-1}(m) \chi_{k-1}$$

mit den charakteristischen Funktionen $\chi_0 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h2}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\chi_1 = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Im Spezialfall $m \in G_h$ gilt

$$(T^{1h}(D^{1h} f))(m) + (F^{1h} f)(m) = f(m).$$

Betont sei abschließend, dass die Struktur des Randoperators immer von der konkreten Gestalt des rechtsinversen Operators abhängig ist. Der T -Operator selbst hängt wieder von der Definition des äußeren Randes ab. Die dafür notwendigen Festlegungen erfolgten im Abschnitt 2.3.1 und sind in der gesamten Arbeit einheitlich gewählt.

Erste, im Rahmen einer Dissertation durchgeführte, numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass es durchaus wichtig sein kann, auch Randgitterpunkte in den Außenecken zu betrachten. In der hier vorliegenden Arbeit wurden die Randwerte in den Außenecken jedoch Null gesetzt, da man diese Ecken ausgehend von einem inneren Gitterpunkt mit keiner Vorwärts- oder Rückwärtsableitung erreichen kann.

2.3.3 Eigenschaften des Cauchy-Operators

Die folgenden Aussagen beziehen sich wieder auf die erste Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren. Ausgangspunkt der Untersuchungen ist der Ausdruck F_{hk}^{1,γ_h^-} , mit $k \in \{1, 2\}$, zu dem ein Zusammenhang mit dem in [Ho], Kapitel 2 eingeführten diskreten Doppelschichtpotential hergestellt werden soll. Dieses Doppelschichtpotential hat in allen Gitterpunkten $m \in G_h$ die Darstellung

$$P_h^D u_R(m) = \sum_{l \in \gamma_h^-} \sum_{k \in K \setminus K_l} [E_h^{\Delta_h}(m-l) - E_h^{\Delta_h}(m-(l+k))] u_R(l).$$

Dabei ist $E_h^{\Delta_h}(m)$ die zum diskreten Laplace-Operator gehörende Fundamentallösung mit der Fouriertransformierten

$$F_h E_h^{\Delta_h}(m) = -\frac{1}{2\pi d^2} \quad \text{mit } d^2 = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{h\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_2}{2} \right).$$

Ferner sind $u_R(l)$ die Randwerte auf γ_h^- und für die Mengen K und K_l gilt $K = \{(0,0), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ und $K_l = \{k \in K : (l+k)h \notin G_h\}$. Untersucht wird der Term $(F_{hk}^{1,\gamma_h^-} f)(m)$ mit $k \in \{1, 2\}$ auf den einzelnen Teilrändern, wobei eine Einschränkung auf den Spezialfall $k=1$ und $f_1(l) \equiv 0$ für alle $l \in \gamma_h^-$ erfolgen soll. Ferner werden die Eigenschaften

$$F_h E_{h11}^1(m) = \frac{\xi_{-2}^h}{2\pi d^2} = F_h D_h^2 E_h^{\Delta_h}(m) \quad \text{und} \quad F_h E_{h12}^1(m) = \frac{-\xi_{-1}^h}{2\pi d^2} = -F_h D_h^1 E_h^{\Delta_h}(m)$$

genutzt. Auf dem Teilrand γ_{h1}^- erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) \\ E_{h12}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= - \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h E_{h12}^1(m-l) f_0(l) = \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} h D_h^1 E_h^{\Delta_h}(m-l) f_0(l) \\ &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^-} [E_h^{\Delta_h}((m+k_1)-l) - E_h^{\Delta_h}((m+k_1)-(l+k_1))] f_0(l). \end{aligned}$$

Dies entspricht genau der Struktur des Doppelschichtpotentials auf dem Rand γ_{h1}^- , wenn auch im Gitterpunkt $m+k_1$. Auf den anderen Teilrändern ergibt sich ebenfalls die Struktur des Doppelschichtpotentials in der Form

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) \\ E_{h12}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in \gamma_{h2}^-} [E_h^{\Delta_h}((m+k_2)-l) - E_h^{\Delta_h}((m+k_2)-(l+k_2))] f_0(l) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} h \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) \\ E_{h12}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in \gamma_{h3}^-} [E_h^{\Delta_h}(m-l) - E_h^{\Delta_h}(m-(l+k_3))] f_0(l) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{h11}^1(m-l) \\ E_{h12}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l \in \gamma_{h4}^-} [E_h^{\Delta_h}(m-l) - E_h^{\Delta_h}(m-(l+k_4))] f_0(l). \end{aligned}$$

Die im folgenden Satz formulierte Aussage ist wiederum ein diskretes Analogon zur klassischen Theorie, bei der die bekannte Projektionseigenschaft wiedergespiegelt wird.

Satz 2.3.4 *Für alle Gitterpunkte $m \in G_h$ gilt*

$$F_{h,M}^1(F_{h,M}^1 f)(m) = (F_{h,M}^1 f)(m).$$

Beweis: Mittels zweimaliger Anwendung der diskreten Borel-Pompeiu Formel in den Gitterpunkten $m \in G_h$ erhält man

$$\begin{aligned} & F_{h,M}^1(F_{h,M}^1 f)(m) \\ &= (F_{h,M}^1 f)(m) - (T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 F_{h,M}^1 f)(m) \\ &= (F_{h,M}^1 f)(m) - (T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 f)(m) + (T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 f)(m) \\ &= (F_{h,M}^1 f)(m) - (T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 f)(m) + (T_{h,M}^1 D_{h,M}^1 f)(m) \\ &= (F_{h,M}^1 f)(m) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Weiterhin wird auf der Grundlage des Cauchy-Riemann-Operators $D_{h,M}^1$ ein Eindeutigkeitssatz formuliert. Die Frage nach der Existenz einer Lösung der Cauchy-Riemann-Gleichung im beschränkten Gebiet wird im Rahmen eines laufenden Projektes genauer untersucht und numerisch realisiert. Neben der Möglichkeit, nur den Realteil der Funktion auf dem Rand vorzugeben, besteht beispielsweise auch die Möglichkeit nur den Imaginärteil oder eine Kombination aus beiden vorzugeben.

Satz 2.3.5 *Es sei $u(m) = (u_0(m), u_1(m))^T$. Wenn das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} D_{h,M}^1 u(m) &= (0, 0) & \forall m \in G_h \\ u_0(r) &= \varphi(r) & \forall r \in \gamma_h^- \\ u_1(m^\alpha) &= \psi(m^\alpha) & \text{für einen beliebigen Punkt } m^\alpha \in G_h \end{aligned}$$

lösbar ist, dann besitzt es eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Angenommen, es existieren zwei Lösungen $u^1(m) = (u_0^1(m), u_1^1(m))^T$ und $u^2(m) = (u_0^2(m), u_1^2(m))^T$. Dann ist die Differenz $u^*(m) = (u_0^*(m), u_1^*(m))^T = u^1(m) - u^2(m)$ eine Lösung des homogenen Randwertproblems. Auf die im Gebiet geltende Differenzengleichung wird der Operator $D_{h,M}^2$ angewendet. Auf Grund der Eigenschaft $D_{h,M}^2 D_{h,M}^1 = I_2 \Delta_h = \begin{pmatrix} \Delta_h & 0 \\ 0 & \Delta_h \end{pmatrix}$ ist $u_0^*(m)$ auch eine Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_0^*(m) &= 0 \quad \forall m \in G_h \\ u_0^*(r) &= 0 \quad \forall r \in \gamma_h^- . \end{aligned}$$

Nach dem in [Ho] bewiesenen Eindeutigkeitssatz ist jedoch $u_0^*(m) \equiv 0$ für alle $m \in G_h \cup \gamma_h^-$ die einzige Lösung dieses Randwertproblems. Daher gilt $u_0^1(m) = u_0^2(m)$. Aus den für alle $m \in G_h$ geltenden Gleichungen

$$\begin{aligned} D_h^1 u_1^*(m) &= -D_h^{-2} u_0^*(m) = 0 \\ D_h^2 u_1^*(m) &= D_h^{-1} u_0^*(m) = 0 \end{aligned}$$

folgt die Beziehung $u_1^*(m) = C$, wobei C eine beliebige Konstante ist. Schließlich resultiert aus der Zusatzbedingung $u_1^*(m^\alpha) = 0$ die Identität $C = 0$ und somit $u_1^1(m) = u_1^2(m)$ ■

Da für die weiteren Ausführungen die im Satz 2.3.1 und Satz 2.3.3 bewiesenen Aussagen auch für den Operator $D_{h,M}^2$ und die dazugehörigen Differenzenoperatoren $T_{h,M}^2$ und $F_{h,M}^2$ benötigt werden, sollen die entsprechenden Sätze formuliert werden. Auf die Beweise wird verzichtet, da die Beweisschritte von Satz 2.3.1 und Satz 2.3.3 unmittelbar übertragen werden können. Definiert wird der rechtsinverse Operator

$$(T_{h,M}^2 f)(m) = ((T_{h1}^{2M} f)(m), (T_{h2}^{2M} f)(m))^T$$

mit den Komponenten

$$(T_{hk}^{2M} f)(m) = (T_{hk}^{2,G} f)(m) + (T_{hk}^{2,\gamma_h^-} f)(m).$$

Dabei sei

$$(T_{hk}^{2,G} f)(m) = \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} (T_{hk}^{2,\gamma_h^-} f)(m) &= \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h2}^- \cup \Gamma_{12}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^- \cup \Gamma_{34}} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrixelemente E_{hki}^2 mit $i = 1, 2$ repräsentieren die Fundamentallösung $E_{h,M}^2$ aus dem Abschnitt 2.2.2.

Satz 2.3.6 Für Funktionen $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ mit $m \in G_h$ gilt

$$D_{h,M}^2(T_{h,M}^2 f)(m) = f(m).$$

Ferner wird der Randoperator

$$(F_{h,M}^2 f)(m) = ((F_{h1}^{2M} f)(m), (F_{h2}^{2M} f)(m))^T$$

mit der komponentenweisen Darstellung

$$(F_{hk}^{2M} f)(m) = (F_{hk}^{2,\gamma_h^-} f)(m) + (F_{hk}^{2,*} f)(m)$$

definiert. Dabei gilt

$$(F_{hk}^{2,\gamma_h^-} f)(m) = \sum_{j=1}^4 \sum_{l \in \gamma_{h,j}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^j & -n_2^j \\ -n_3^j & n_4^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} & (F_{hk}^{2,*} f)(m) \\ = & \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h2}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^2 & -(n_2^1 + n_2^2) \\ -(n_3^1 + n_3^2) & n_4^1 + n_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ & + \sum_{l \in \gamma_{h3}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} 0 \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^3 + n_1^4 & -(n_2^3 + n_2^4) \\ -(n_3^3 + n_3^4) & n_4^3 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \\ & + \sum_{l \in \gamma_{h1}^- \cap \gamma_{h4}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 + n_1^4 & -(n_2^1 + n_2^4) \\ -(n_3^1 + n_3^4) & n_4^1 + n_4^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \sum_{l \in \gamma_{h2}^- \cap \gamma_{h3}^-} h \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 + n_1^3 & -(n_2^2 + n_2^3) \\ -(n_3^2 + n_3^3) & n_4^2 + n_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Satz 2.3.7 Die Borel-Pompeiu-Formel hat in den Komponenten $k = 1$ und $k = 2$ die Gestalt

$$(T_{hk}^{2M}(D_{h,M}^2 f))(m) + (F_{hk}^{2M} f)(m) = f_{k-1} \chi_{k-1}^*$$

mit den charakteristischen Funktionen $\chi_0^* = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h1}^- \cup \gamma_{h4}^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und

$$\chi_1^* = \begin{cases} 1 & \forall m \in G_h \cup \gamma_{h2}^- \cup \gamma_{h3}^- \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Spezialfall $m \in G_h$ gilt

$$(T_{h,M}^2(D_{h,M}^2 f))(m) + F_{h,M}^2 f(m) = f(m).$$

Auffallend ist, daß bei der Definition des Operators $F_{h,M}^2$ im Vergleich zum Randoperator $F_{h,M}^1$ ein Vorzeichenwechsel sowie der Übergang zum konjugiert komplexen Normalenvektor $\begin{pmatrix} n_1^j & -n_2^j \\ -n_3^j & n_4^j \end{pmatrix}$ mit $j \in \{1, \dots, 4\}$ erfolgt. Anhand der im kontinuierlichen Fall geltenden Eigenschaften soll dafür eine Erklärung gegeben werden. Untersucht wird das Cauchy-Integral

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}}{2\pi(z-\xi)} \alpha(\xi) f(\xi) d\xi$$

mit der zum Operator $D^1 = (-\mathbf{i}) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$ gehörenden Fundamentallösung $E^1(z-\xi) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi(z-\xi)}$ und dem äußeren Normalenvektor $\alpha(\xi)$. Aus der Beziehung

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}(\xi-z)}{|\xi-z|^2} \alpha(\xi) f(\xi) d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\mathbf{i}(\xi-z)} \overline{\alpha(\xi)} \overline{f(\xi)} d\bar{\xi}}{|\xi-z|^2}$$

folgt

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}(\xi-z) \overline{\alpha(\xi)} \overline{f(\xi)} d\bar{\xi}}{|\xi-z|^2},$$

wobei $E^2(z-\xi) = \frac{\mathbf{i}(z-\xi)}{2\pi|z-\xi|^2} = \frac{\mathbf{i}}{2\pi(z-\xi)}$ die zum Operator $D^2 = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$ gehörende Fundamentallösung ist. Mit Hilfe der Substitution $u(z) = \overline{f(z)}$ erhält man die Gleichung

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}(\xi-z) u(\xi) \overline{\alpha(\xi)} d\bar{\xi}}{|\xi-z|^2}. \quad (2.18)$$

Diese Umformung erklärt sowohl den Vorzeichenwechsel als auch den Übergang zur konjugiert komplexen Form des Normalenvektors.

Genauer betrachtet wird nun das zum kontinuierlichen Fall gehörende Produkt $\overline{\alpha(\xi)} d\bar{\xi}$ auf den Teilrändern γ_{hj}^- , $j = 1, \dots, 4$, wobei zunächst der Fall $j = 1$ untersucht wird. Unter Ausnutzung des Homomorphismus zwischen komplexen Zahlen und Matrizen gilt

$$\begin{pmatrix} n_1^1 & -n_2^1 \\ -n_3^1 & n_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 & d\xi_2 \\ -d\xi_2 & d\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 & d\xi_2 \\ -d\xi_2 & d\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\xi_1 & -d\xi_2 \\ d\xi_2 & -d\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix entspricht dem komplexen Differential $-d\xi_1 + \mathbf{i} d\xi_2$. Da auf dem Rand γ_{h1}^- keine Änderung in ξ_1 -Richtung erfolgt, kann $d\xi_1 = 0$ gesetzt werden und man erhält $\overline{\alpha(\xi)} d\bar{\xi} = \mathbf{i} d\xi_2$. Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} n_1^1 & n_2^1 \\ n_3^1 & n_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 & -d\xi_2 \\ d\xi_2 & d\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 & -d\xi_2 \\ d\xi_2 & d\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\xi_1 & d\xi_2 \\ -d\xi_2 & -d\xi_1 \end{pmatrix},$$

wobei die auf der rechten Seite stehende Matrix dem komplexen Differential $-d\xi_1 - \mathbf{i} d\xi_2$ entspricht. Setzt man wiederum $d\xi_1 = 0$, so gilt $\alpha(\xi) d\xi = -\mathbf{i} d\xi_2$. Dieser Zusammenhang zwischen $\alpha(\xi) d\xi$ und $\overline{\alpha(\xi)} d\bar{\xi}$ kann auch auf den anderen Teilrändern γ_{hj}^- , $j = 2, 3, 4$ gezeigt werden, so dass insgesamt auf allen diskreten Teilrändern gilt $\alpha(\xi) d\xi = -\overline{\alpha(\xi)} d\bar{\xi}$. Dies erklärt den Zusammenhang zwischen Formel (2.18) und dem Cauchy-Integral

$$f(z) = \int_{\gamma_h^-} \frac{\mathbf{i}}{2\pi(z - \xi)} \alpha(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Will man die in den Abschnitten 2.2 und 2.3 vorgestellten Resultate für numerische Berechnungen nutzen, ist hauptsächlich ein Basispaket für die Differenzenoperatoren $D_{h,M}^j$ mit $j = 1, 2$, die rechtsinversen Operatoren $T_{h,M}^j$ und die Randoperatoren $F_{h,M}^j$ zu erstellen. Dies setzt die genaue Erfassung des diskreten Gebietes einschließlich dessen Rand und die sehr präzise Berechnung der diskreten Fundamentallösung voraus. Das hier verfolgte Ziel war es, die Grundlagen für die dazugehörige diskrete Theorie zu erarbeiten und zwar so, dass ein einheitliches und aufeinander abgestimmtes Konzept als Ausgangspunkt für die numerische Umsetzung mit Matlab zur Verfügung steht.

2.4 Orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ und Beschränktheit des rechtsinversen Operators

2.4.1 Orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ auf der Basis der diskreten Cauchy-Riemann Operatoren

Auf der Grundlage der Operatoren $D_{h,M}^1$ und $D_{h,M}^2$ aber auch der Operatoren D^{1h} und D^{2h} ist es möglich, eine orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ vorzunehmen. Die Vorgehensweise wird im folgenden beschrieben und wurde bereits in der Arbeit [GH5] für die Operatoren $D_{h,M}^1$ und $D_{h,M}^2$ vorgestellt. Durch diese orthogonale Zerlegung verfügt man über ein entscheidendes Hilfsmittel, das den weiteren Verlauf dieser Arbeit prägen wird, da in einem der beiden Teilräume die diskret holomorphen Funktionen liegen.

Es sei \mathbb{R}^2 der Euklidische Raum mit den Einheitsvektoren e_i , $i = 1, 2$ und G ein beschränktes Gebiet. Betrachtet werden Funktionen $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ auf dem Gitter $\mathbb{R}_h^2 = \{mh = (m_1h, m_2h) : m_i \in \mathbb{Z}\}$ mit einer festen Schrittweite $h > 0$. Wie auch bisher sei $G_h = G \cap \mathbb{R}_h^2$ das diskrete Gebiet und $\gamma_h^- = \{rh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : \exists k_i \text{ mit } (r + k_i)h \in G_h, i = 1, \dots, 4\}$ dessen Rand, der in die Teilränder $\gamma_{hi}^- = \{rh \in \gamma_h^- : (r + k_i)h \in G_h, i = 1, \dots, 4\}$ zerlegt werden kann.

Um eine orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ der Funktionen $w(m) = (w_0(m), w_1(m))^T$ und $v(m) = (v_0(m), v_1(m))^T$ vornehmen zu können, wird das Skalarprodukt

$$\langle w, v \rangle = \sum_{m \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} w_0(m) \\ w_1(m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_0(m) \\ v_1(m) \end{pmatrix}$$

betrachtet. Außerhalb von G_h werden die Funktionen durch Null fortgesetzt, so dass die Differenzenableitungen $D_h^{\pm j} w_i(m)$ und $D_h^{\pm j} v_i(m)$ mit $j \in \{1, 2\}$ und $i \in \{0, 1\}$ erklärt sind. Da insbesondere $w(r) = v(r) = (0, 0)^T$ für alle $r \in \gamma_h^-$ gilt, kann im Raum $\dot{w}_2^1(G_h)$ mit der Norm

$$\|f\|_{\dot{w}_2^1(G_h)} = \|f\|_{l_2(G_h)} + \left(\sum_{j=1}^2 \|D_h^{-j} f_0\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2 + \sum_{j=1}^2 \|D_h^{-j} f_1\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2 \right)^{1/2}$$

gearbeitet werden. Auf Grund der Äquivalenz der Normen könnte diese Norm auch durch

$$\|f\|_{\dot{w}_2^1(G_h)}^2 = \|f\|_{l_2(G_h)}^2 + \sum_{j=1}^2 \|D_h^{-j} f_0\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2 + \sum_{j=1}^2 \|D_h^{-j} f_1\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2$$

ersetzt werden. Mit Hilfe der diskreten Cauchy-Riemann Operatoren erhält man die folgende orthogonale Zerlegung:

Satz 2.4.1 *Für jede fest gewählte Schrittweite h gilt*

$$l_2(G_h) = \ker D_{h,M}^1(G_h) \oplus D_{h,M}^2(\dot{w}_2^1(G_h)) = \ker D^{1h}(G_h) \oplus D^{2h}(\dot{w}_2^1(G_h)).$$

Beweis: Der Beweis wird für die Operatoren $D_{h,M}^1$ und $D_{h,M}^2$ vorgestellt und kann ebenso für die Operatoren D^{1h} und D^{2h} geführt werden. Es seien $w(m) \in \dot{w}_2^1(G_h)$ und $v(m) \in D_{h,M}^2(\dot{w}_2^1(G_h))$. Zunächst wird bewiesen, dass $D_{h,M}^2(\dot{w}_2^1(G_h))^\perp \subset \ker D_{h,M}^1(G_h)$ gilt und dabei vorausgesetzt, dass das Skalarprodukt die Eigenschaft $\langle w, v \rangle = 0$ für alle $v(m) \in D_{h,M}^2(\dot{w}_2^1(G_h))$ besitzt. Dadurch gilt für alle $s(m) = (s_0(m), s_1(m))^T \in \dot{w}_2^1(G_h)$

$$\langle w, D_{h,M}^2 s \rangle = 0.$$

Dieses Skalarprodukt kann auch in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m \in G_h} h^2 [w_0(m) D_h^2 s_0(m) + w_1(m) D_h^{-1} s_0(m) \\ &\quad + (-w_0(m) D_h^1 s_1(m) + w_1(m) D_h^{-2} s_1(m))] \end{aligned}$$

geschrieben werden. Durch einfache Verschiebung des Summationsindex zeigt man für Funktionen $w(m), s(m) \in \dot{w}_2^1(G_h)$

$$\sum_{m \in G_h} h^2 w_i(m) [D_h^{\mp j} s_k(m)] = - \sum_{m \in G_h} h^2 [D_h^{\pm j} w_i(m)] s_k(m) \quad (2.19)$$

mit $j \in \{1, 2\}$ und $i, k \in \{0, 1\}$. Daraus resultiert

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, D_{h,M}^2 s \rangle \\ &= - \sum_{m \in G_h} h^2 [D_h^{-2} w_0(m) + D_h^1 w_1(m)] s_0(m) + \\ &\quad (-D_h^{-1} w_0(m) + D_h^2 w_1(m)) s_1(m) = - \langle D_{h,M}^1 w, s \rangle. \end{aligned}$$

Da die Beziehung für alle $s(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h)$ gelten soll, folgt $w(m) \in \ker D_{h,M}^1(G_h)$. Gezeigt wird nun, dass auch $\ker D_{h,M}^1(G_h) \subset D_{h,M}^2(\mathring{w}_2^1(G_h))^\perp$ gilt. Für die Funktion $w(m) \in \ker D_{h,M}^1(G_h)$ erhält man in Analogie zu den bisherigen Beweisschritten

$$\langle w, v \rangle = \langle w, D_{h,M}^2 s \rangle = - \langle D_{h,M}^1 w, s \rangle = 0.$$

Aus beiden Teilen des Beweises folgt schließlich $\ker D_{h,M}^1(G_h) = D_{h,M}^2(\mathring{w}_2^1(G_h))^\perp$ ■

Wie bereits im Abschnitt 2.2.2 erläutert, werden Funktionen, die im Kern des Operators $D_{h,M}^1$ beziehungsweise D^{1h} liegen, als diskret holomorphe Funktionen bezeichnet. Ausgehend von der orthogonalen Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ werden die Orthoprojektoren auf $\ker D_{h,M}^1(G_h)$ beziehungsweise $D_{h,M}^2(\mathring{w}_2^1(G_h))$ mit P_h^+ und Q_h^+ bezeichnet. Sie können als 2×2 -Matrizen aufgefasst werden und besitzen die im folgenden Lemma angegebenen Eigenschaften.

Lemma 2.4.1 *Für die Orthoprojektoren P_h^+ und Q_h^+ gilt*

$$\begin{aligned} D_{h,M}^1(P_h^+ w)(m) &= (0, 0)^T \quad \forall m \in G_h \quad \text{und} \\ D_{h,M}^1(Q_h^+ w)(m) &= D_{h,M}^1((I_2 - P_h^+)w)(m) = D_{h,M}^1 w(m). \end{aligned}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition der Orthoprojektoren.

Im weiteren sollen spezielle Eigenschaften bewiesen werden, die eng mit der orthogonalen Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ zusammenhängen und im Abschnitt 3.3.2. benötigt werden.

Lemma 2.4.2 *Für $w(m), s(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h)$ gilt*

$$\langle w, D_{h,M}^2 s \rangle = - \langle D_{h,M}^1 w, s \rangle \quad \text{und} \quad \langle w, D_{h,M}^1 s \rangle = - \langle D_{h,M}^2 w, s \rangle.$$

Der Beweis der ersten Eigenschaft wurde bereits im Satz 2.4.1 geführt. Unter Verwendung der Beziehung (2.19) wird die zweite Eigenschaft auf analoge Weise gezeigt.

Ebenso erhält man unter Verwendung der zweiten Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren

$$\langle w, D^{2h} s \rangle = - \langle D^{1h} w, s \rangle \quad \text{und} \quad \langle w, D^{1h} s \rangle = - \langle D^{2h} w, s \rangle.$$

Das folgende Lemma beruht auf der Überlegung, dass die hier betrachteten diskreten Operatoren den Laplaceoperator faktorisieren. Nach Lemma 2.4.2 funktioniert das Überwälzen der Operatoren auf der Grundlage des Skalarproduktes. Im kontinuierlichen Fall ist jedoch auch eine Faktorisierung des Laplaceoperators mittels Divergenz und Gradient möglich, wobei auch in diesem Fall das Überwälzen der Operatoren im Sinne des Skalarproduktes möglich ist. Überprüft werden soll, ob dieser Zusammenhang auch in der diskreten Theorie besteht.

Definiert wird

$$[\text{grad}_h^+ w_0](m) = \begin{pmatrix} D_h^1 w_0(m) \\ D_h^2 w_0(m) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\text{div}_h^- s(m) = D_h^{-1} s_0(m) + D_h^{-2} s_1(m),$$

so dass $\text{div}_h^- \text{grad}_h^+ w_0 = \Delta_h w_0$ gilt.

Lemma 2.4.3 Für $w_0(m), s(m) \in w_2^1(G_h)$ mit $w_0(r) = 0$ auf $\gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-$, $s_0(r) = 0$ auf γ_{h1}^- und $s_1(r) = 0$ auf γ_{h2}^- gilt

$$\langle \text{grad}_h^+ w_0, s \rangle = - \sum_{m \in G_h} h^2 w_0(m) \text{div}_h^- s(m) = \langle w_0, -\text{div}_h^- s \rangle.$$

Beweis: Unter Beachtung der Randbedingungen für $w_0(m)$ und $s(m)$ beweist man in Analogie zur Beziehung (2.19)

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}_h^+ w_0, s \rangle &= \sum_{m \in G_h} h^2 [(D_h^1 w_0(m)) s_0(m) + (D_h^2 w_0(m)) s_1(m)] \\ &= - \sum_{m \in G_h} h^2 w_0(m) \text{div}_h^- s(m) = \langle w_0, -\text{div}_h^- s \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.4.2 Die Beschränktheit des rechtsinversen Operators

In den folgenden beiden Lemmata wird die Beschränktheit des Operators $T_{h,M}^2$ gezeigt.

Lemma 2.4.4 Der Operator $T_{h,M}^2 : l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+ \rightarrow w_2^1(G_h)$ ist beschränkt.

Beweis: Zu jedem $u(m) \in l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+$ existiert eine Funktion $v(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h)$ mit $u(m) = D_{h,M}^2 v(m)$. Aus der Borel-Pompeiu-Formel folgt $v(m) = T_{h,M}^2 u(m)$. Auf Grund der Beziehung (2.19), der in [Ho] bewiesenen ersten Greenschen Formel und

der Poincaréschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\|u\|_{l_2(G_h)}^2 &= \|D_{h,M}^2 v\|_{l_2(G_h)}^2 = \langle D_{h,M}^2 v, D_{h,M}^2 v \rangle = \langle -D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 v, v \rangle \\
&= \sum_{m \in G_h} h^2 [(-\Delta_h v_0(m)) v_0(m) + (-\Delta_h v_1(m)) v_1(m)] \\
&= \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-} \sum_{i=1}^2 h^2 [(D_h^{-i} v_0(m))^2 + (D_h^{-i} v_1(m))^2] \\
&\geq C_3^{-1} (\|v_0\|_{l_2(G_h)}^2 + \|v_1\|_{l_2(G_h)}^2) = C_3^{-1} \|v\|_{l_2(G_h)}^2,
\end{aligned}$$

wobei die Konstante C_3 mit dem kleinsten Eigenwert vom diskreten Laplaceoperator zusammenhängt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|T_{h,M}^2 u\|_{w_2^1(G_h)} &= \|v\|_{w_2^1(G_h)} \\
&= \|v\|_{l_2(G_h)} + \left(\sum_{i=1}^2 [\|D_h^{-i} v_0\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2 + \|D_h^{-i} v_1\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2] \right)^{1/2} \\
&\leq (C_3^{1/2} + 1) \|u\|_{l_2(G_h)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 2.4.5 Für $1 < p < 2$ und $q < \frac{2p}{2-p}$ ist der Operator $T_{h,M}^2 : l_p(G_h) \rightarrow l_q(G_h)$ beschränkt.

Beweis: Es sei $p < q$. Zunächst werden die Komponenten $(T_{hk}^{2M} f)(m)$ mit $k = 1, 2$ nach oben abgeschätzt. Da zum Definitionsbereich des Operators $T_{h,M}^2$ nur Funktionswerte $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ mit $m \in G_h$ gehören, kann $f_0(r) = f_1(r) = 0$ für alle $r \in \gamma_h^-$ gesetzt werden. Ausgehend von der im Kapitel 2, Lemma 2.2.1 bewiesenen Eigenschaft $|E_{hkj}^2(m-l)| \leq C_1(|m-l|+h)^{-1}$ der diskreten Fundamentallösung mit $k, j \in \{1, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned}
|(T_{hk}^{2M} f)(m)| &= \left| \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^2(m-l) \\ E_{hk2}^2(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0(l) \\ f_1(l) \end{pmatrix} \right| \\
&\leq C_1 \sum_{l \in G_h} h^2 (|m-l|+h)^{-1} (|f_0(l)| + |f_1(l)|) \\
&\leq 2C_1 \sum_{l \in G_h} h^2 (|m-l|+h)^{-1} |f(l)|.
\end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung $q < \frac{2p}{2-p}$ folgt $\frac{2}{q} > 1 - \frac{2}{p^*}$ mit $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, also $1 = \frac{2}{q} + \frac{2}{p^*} - 2\beta$ mit $\beta > 0$. Daraus resultiert die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\sum_{l \in G_h} h^2 (|m-l|+h)^{-1} |f(l)| \\
&= \sum_{l \in G_h} h^2 \left(|f(l)|^{p/q} (|m-l|+h)^{-2/q+\beta} \right) \left(|f(l)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right) \left((|m-l|+h)^{-2/p^*+\beta} \right).
\end{aligned}$$

Man setzt $\alpha_1 = \frac{1}{q}$, $\alpha_2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ und $\alpha_3 = \frac{1}{p^*}$, so dass gilt $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ und wendet zweimal die Höldersche Ungleichung auf das Produkt der drei Faktoren an. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in G_h} h^2(|m-l|+h)^{-1} |f(l)| \\ & \leq \left(\sum_{l \in G_h} h^2 |f(l)|^p (|m-l|+h)^{-2+\beta q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{l \in G_h} h^2 |f(l)|^p \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{l \in G_h} h^2 (|m-l|+h)^{-2+\beta p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor gilt $\left(\sum_{l \in G_h} h^2 |f(l)|^p \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} = \|f\|_{l_p(G_h)}^{1-p/q}$, während der dritte Faktor mit Hilfe eines Integrals in Polarkoordinaten in der Form

$$\left(\sum_{l \in G_h} h^2 (|m-l|+h)^{-2+\beta p^*} \right)^{1/p^*} \leq \left(\frac{C_2 (\text{diam } G_h)^{\beta p^*}}{\beta p^*} \right)^{1/p^*}$$

mit $\text{diam } G_h = \max_{l \in G_h} |m-l|$ abgeschätzt werden kann. Zur Vereinfachung der Schreibweise definiert man

$$K(p^*, q, G_h) = C_2 \frac{(\text{diam } G_h)^{\beta p^*}}{\beta p^*} = C_2 \frac{(\text{diam } G_h)^{\frac{p^*}{q} + 1 - \frac{p^*}{2}}}{\frac{p^*}{q} + 1 - \frac{p^*}{2}}$$

und erhält als Zwischenergebnis

$$|(T_{hk}^{2M} f)(m)| \leq 2C_1 (K(p^*, q, G_h))^{\frac{1}{p^*}} \|f\|_{l_p(G_h)}^{1-p/q} \left(\sum_{lh \in G_h} h^2 |f(l)|^p (|m-l|+h)^{-2+\beta q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daraus folgt auf Grund der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|T_{h,M}^2\|_{l_q(G_h)}^q &= \sum_{m \in G_h} h^2 (|T_{h1}^{2M}|^2 + |T_{h2}^{2M}|^2)^{q/2} \\ &\leq (2\sqrt{2} C_1)^q (K(p^*, q, G_h))^{\frac{q}{p^*}} \|f\|_{l_p(G_h)}^{q-p} \sum_{l \in G_h} h^2 |f(l)|^p K(q, p^*, G_h), \end{aligned}$$

woraus die Beziehung $\|T_{h,M}^2\|_{l_q(G_h)} \leq 2\sqrt{2} C_1 (K(p^*, q, G_h))^{\frac{1}{p^*}} (K(q, p^*, G_h))^{\frac{1}{q}} \|f\|_{l_p(G_h)}$ resultiert ■

Es sei vermerkt, daß die im Lemma 2.4.5 bewiesene Eigenschaft in analoger Weise auch für den Operator $T_{h,M}^1$ und auch den Operator T^{1h} gezeigt werden kann. Von besonderem Interesse für die weiteren Untersuchungen sind die Spezialfälle in Folgerung 2.4.1, die unmittelbar aus Lemma 2.4.5 resultieren.

Folgerung 2.4.1 *Der Operator $T_{h,M}^2 : l_p(G_h) \rightarrow l_2(G_h)$ ist für $1 < p < 2$ und der Operator $T_{h,M}^2 : l_2(G_h) \rightarrow l_q(G_h)$ für $q < \infty$ beschränkt.*

Erwähnt sei außerdem, dass auf Grund der im Abschnitt 2.2.5 beschriebenen natürlichen Fortsetzung der diskreten Fundamentallösung auch eine natürliche Fortsetzung des rechtsinversen Operators existiert. Dadurch besteht die Möglichkeit, die Differenz zwischen diskretem und klassischen rechtsinversen Operator auch in Räumen zu untersuchen, die nicht auf das Gitter beschränkt sind. Genauere Untersuchungen dazu wurden bisher nicht durchgeführt, da sie für den weiteren Aufbau dieser Arbeit nicht erforderlich sind.

2.5 Diskretes Kurvenintegral

Als weiteres Hilfsmittel für die Untersuchungen im Abschnitt 3.3 wird ein Analogon zum klassischen Kurvenintegral benötigt. Das Ausgangsproblem läßt sich wie folgt beschreiben: Es sei u_0 eine diskret harmonische Funktion. Gesucht wird nach einer zu u_0 konjugiert harmonischen Funktion u_1 mit der Eigenschaft

$$D^{1h} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Komponentenweise kann diese Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} D_h^{-1} u_0 &= D_h^2 u_1 \\ D_h^{-2} u_0 &= -D_h^1 u_1 \end{aligned}$$

geschrieben werden. In Analogie zu den Methoden der komplexen Analysis, wo u_1 mit Hilfe eines Kurvenintegrals konstruiert wird, wird hier nach einer Summe gesucht, die das Kurvenintegral approximiert. Bereits von Duffin wurde in [D2] ein diskretes Kurvenintegral in der Form

$$\int_a^b f(z), dz = \sum_{n=1}^m (f_n + f_{n-1})(z_n - z_{n-1})/2$$

definiert, wobei $a = z_0, z_1, \dots, z_m = b$ eine Folge von Gitterpunkten mit $|z_k - z_{k+1}| = 1$ und $f_k = f(z_k)$ bezeichnet. Er beweist, dass die Summe wegunabhängig ist, wenn die Funktion diskret analytisch ist.

Zur Vereinfachung soll bei den weiteren Ausführungen zunächst ein Rechteck betrachtet werden in dem Anfangspunkt (a_1, a_2) und Endpunkt (m_1, m_2) so festgelegt werden, dass $m_1 > a_1$ und $m_2 > a_2$ gilt. Der erste Weg führe von (a_1, a_2) über (m_1, a_2) nach (m_1, m_2) .

Es gilt

$$u_1(m_1, a_2) - u_1(a_1, a_2) = \sum_{i=a_1+1}^{m_1} u_1(i, a_2) - \sum_{i=a_1}^{m_1-1} u_1(i, a_2)$$

$$= \sum_{i=a_1}^{m_1-1} (u_1((i+1), a_2) - u_1(i, a_2)) .$$

In Analogie erhält man mittels Verschiebung des Summenindex

$$u_1(m_1, m_2) - u_1(m_1, a_2) = \sum_{j=a_2}^{m_2-1} (u_1(m_1, j+1) - u_1(m_1, j)) .$$

Durch die Addition beider Gleichungen gelangt man zur Darstellung

$$u_1(m_1, m_2) - u_1(a_1, a_2) = \sum_{i=a_1}^{m_1-1} h D_h^1 u_1(i, a_2) + \sum_{j=a_2}^{m_2-1} h D_h^2 u_1(m_1, j) .$$

Mit Hilfe der Eigenschaft (2.20) kann nun die Funktion u_1 konstruiert werden durch

$$[u_1(m_1, m_2) = u_1(a_1, a_2) - h \sum_{i=a_1}^{m_1-1} D_h^{-2} u_0(i, a_2) + h \sum_{j=a_2}^{m_2-1} D_h^{-1} u_0(m_1, j) .$$

Der Summand $u_1(a_1, a_2)$ auf der rechten Seite zeigt, dass u_1 nur eindeutig bis auf eine Konstante ist. Werden andere Wege betrachtet, dann ist es nur wichtig, ein aus Rechtecken zusammengesetztes Gebiet vorliegen zu haben, das im Sinne von Samarskij [Sam] verbunden ist. Konkret muss es möglich sein, zwei Gitterpunkte innerhalb des Gebietes durch einen Polygonzug zu verbinden, so dass alle Knoten innere Gitterpunkte sind und die Linien parallel zu den Achsen verlaufen. Ist diese Eigenschaft erfüllt, dann kann nach der vorgestellten Methode eine Funktion u_1 konstruiert werden. Es ist auch möglich, nur Wege in einer Richtung zu betrachten.

Unter Verwendung der Konstruktionsvorschrift für u_1 und der Eigenschaft $\Delta_h u_0 = 0$ weist man leicht nach, dass $\Delta_h u_1 = 0$ gilt. Auch die Gültigkeit der Eigenschaft (2.20) kann unter Einbeziehung der konstruierten Funktion u_1 überprüft werden.

2.6 Elementare diskret holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt werden ganz konkrete diskret holomorphe Funktionen vorgestellt und genauer untersucht. Begonnen wird im Abschnitt 2.6.1 mit diskreten Polynomen, die der Appell-Eigenschaft genügen. Speziell im eindimensionalen Fall wurden solche Polynome bereits von Faustino und Kähler in [Fau] betrachtet, dann gezielt zu Multi-Index-Polynomen erweitert, um eine Fischerdekomposition in Bezug auf den diskreten Dirac-Operator zu erzielen und so wie auch Summen mit Euler- und Gamma-Operatoren in unbeschränkten Gebieten zu arbeiten. An entsprechender Stelle wird im Abschnitt 2.6.2 auf diese Polynome aus dem eindimensionalen Fall hingewiesen. Eine Appel-Eigenschaft im höherdimensionalen Fall war nicht das

Ziel der Autoren. In einer erst kürzlich erschienenen Arbeit von Dynnikov [Dyn] werden auch Sätze über diskrete Polynome formuliert, jedoch ist in diesem Fall auf Grund der gewählten Approximation der Cauchy-Riemann-Operatoren keine Faktorisierung des Laplaceoperators zu erkennen, während in der hier vorliegenden Arbeit genau dieser Faktorisierung große Bedeutung zukommt, um den Zusammenhang zwischen diskret holomorphen Funktionen und diskret harmonischen Funktionen gewährleisten zu können. In der Arbeit von [Bo] spielen auch Appellsysteme eine zentrale Rolle, wobei hier hauptsächlich in der Quaternionenalgebra gearbeitet wird.

Im Abschnitt 2.6.2 wird schließlich speziell auf die diskrete Exponentialfunktion, sowie die Sinus- und Cosinusfunktion eingegangen. Diese Funktionen werden später im Kapitel 4 noch einmal analysiert, jedoch aus Sicht auf die klassische Theorie im hyperkomplexen Fall, um einen Ausblick auf Erweiterungsmöglichkeiten dieser Arbeit zu geben.

2.6.1 Diskrete Polynome und die Appell-Eigenschaft

Satz 2.6.1 Die Polynome $P^n(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1, m_2) \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} P_0^n &= \sum_{s=0(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \quad \text{und} \\ P_1^n &= \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \end{aligned}$$

besitzen im Fall $n \geq 1$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1 - 1, m_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1, m_2) \end{pmatrix} &= n \begin{pmatrix} P_0^{n-1}(m_1, m_2) \\ P_1^{n-1}(m_1 - 1, m_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft wird als Appell-Eigenschaft bezeichnet. Die Bedeutung dieser Eigenschaft liegt darin, dass die komplexe Ableitung einer Basisfunktion wieder auf ein Vielfaches einer Basisfunktion führt. Konkret wird ein System von Polynomen $\{P^n(z)\}$ ein Appell-System genannt, wenn $\frac{d}{dz} P^n(z) = n P^{n-1}(z)$ mit $n = 1, 2, \dots$ gilt.

Bevor dieser Satz ausführlich bewiesen wird, sollen die ersten dieser Polynome konkret angegeben werden, um deren Struktur besser zu verdeutlichen. Es gilt

$$\begin{aligned} P^1(m_1, m_2) &= \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \\ P^2(m_1, m_2) &= \begin{pmatrix} m_1(m_1 - 1) - m_2(m_2 + 1) \\ 2m_1 m_2 \end{pmatrix} \\ P^3(m_1, m_2) &= \begin{pmatrix} m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2) - 3(m_1 - 1)m_2(m_2 + 1) \\ 3m_1(m_1 - 1)m_2 - (m_2 - 1)m_2(m_2 + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 2.6.1: Beginnend mit der Appell-Eigenschaft soll zunächst die erste Komponente betrachtet werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(D_h^1 P_0^n(m_1, m_2) + D_h^2 P_1^n(m_1, m_2)) \\ &= \frac{1}{2h} \left(\sum_{s=0(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - (k-1)) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \right. \\ & \quad - \sum_{s=0(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \\ & \quad + \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l + 1) \\ & \quad \left. - \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \right) \end{aligned}$$

Bei den ersten beiden Summen gilt im Fall $s = n$

$$\binom{n}{n} (-1)^{n/2} \prod_{l=1-n/2}^{n/2} (m_2 + l) - \binom{n}{n} (-1)^{n/2} \prod_{l=1-n/2}^{n/2} (m_2 + l) = 0.$$

Daher wird bei diesen Summen der obere Index auf $n-1$ gesetzt. Ferner lassen sich beide Summen auf Grund der Eigenschaft

$$\binom{n}{s} (n-s) = n \binom{n-1}{s} \quad (2.21)$$

wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0(2)}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \left(\prod_{k=s/2-1}^{n-s/2-2} (m_1 - k) - \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \right) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \\ &= \sum_{s=0(2)}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-2} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \cdot (n-s) \\ &= n \sum_{s=0(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-1-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \end{aligned}$$

Beim Zusammenfassen der letzten zwei Summen wird die Beziehung

$$\binom{n}{s} s = n \binom{n-1}{s-1} \quad (2.22)$$

verwendet. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \left(\prod_{l=(1-s)/2+1}^{(s-1)/2+1} (m_2 + l) - \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \right) \\ &= \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(3-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \cdot s \\ &= n \sum_{s=1(2)}^n \binom{n-1}{s-1} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(3-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \\ &= n \sum_{s=0(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-1-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \end{aligned}$$

Da beide Teilergebnisse übereinstimmen, erhält man

$$\frac{1}{2} (D_h^1 P_0^n(m_1, m_2) + D_h^2 P_1^n(m_1, m_2)) = n P_0^{n-1}(m_1, m_2).$$

Betrachtet wird nun die zweite Komponente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (-D_h^{-2} P_0^n(m_1, m_2) + D_h^{-1} P_1^n(m_1, m_2)) \\ &= \frac{1}{2h} \left(- \sum_{s=0(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) \right. \\ & \quad + \sum_{s=0(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l - 1) \\ & \quad + \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \\ & \quad \left. - \sum_{s=1(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - (k+1)) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \right) \end{aligned}$$

Bei den ersten beiden Summen gilt im Fall $s = 0$

$$- \binom{n}{0} (-1)^{0/2} \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) + \binom{n}{0} (-1)^{0/2} \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) = 0.$$

Daher wird bei diesen Summen der untere Index auf 2 gesetzt. Ferner lassen sich beide Summen auf Grund der Eigenschaft 2.22 wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=2(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \left(- \prod_{l=1-s/2}^{s/2} (m_2 + l) + \prod_{l=-s/2}^{s/2-1} (m_2 + l) \right) \\
&= \sum_{s=2(2)}^n \binom{n}{s} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2-1} (m_2 + l) \cdot (-s) \\
&= -n \sum_{s=2(2)}^n \binom{n-1}{s-1} (-1)^{s/2} \prod_{k=s/2}^{n-s/2-1} (m_1 - k) \prod_{l=1-s/2}^{s/2-1} (m_2 + l) \\
&= -n \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{(s+1)/2} \prod_{k=(s+1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \\
&= -n \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{(s+1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-1-s/2-3/2} (m_1 - 1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l)
\end{aligned}$$

Beim Zusammenfassen der letzten zwei Summen wird die Beziehung 2.21 verwendet. Zusätzlich gilt im Fall $s = n$

$$\binom{n}{n} (-1)^{(n-1)/2} \prod_{l=(1-n)/2}^{(n-1)/2} (m_2 + l) - \binom{n}{n} (-1)^{(n-1)/2} \prod_{l=(1-n)/2}^{(n-1)/2} (m_2 + l) = 0,$$

so dass der obere Summenindex auf $n-1$ gesetzt wird. Dadurch gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \left(\prod_{k=(s-1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) - \prod_{k=(s-1)/2+1}^{n-s/2-1/2} (m_1 - k) \right) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \\
&= \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s+1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \cdot (n-s) \\
&= n \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s+1)/2}^{n-s/2-3/2} (m_1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l) \\
&= n \sum_{s=1(2)}^{n-1} \binom{n-1}{s} (-1)^{(s-1)/2} \prod_{k=(s-1)/2}^{n-1-s/2-3/2} (m_1 - 1 - k) \prod_{l=(1-s)/2}^{(s-1)/2} (m_2 + l).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Beziehung $(-1)^{(s+1)/2} = (-1)^{(s-1)/2+1} = -(-1)^{(s-1)/2}$ lassen sich beide Teilergebnisse zusammenfassen und man erhält

$$\frac{1}{2} (-D_h^{-2} P_0^n(m_1, m_2) + D_h^{-1} P_1^n(m_1, m_2)) = n P_1^{n-1}(m_1 - 1, m_2).$$

Damit ist zunächst die Appell-Eigenschaft bewiesen. Durch Wiederholung der Beweisschritte, angepasst auf die veränderten Differenzenableitungen zeigt man leicht,

dass die eingeführten Polynome auch diskret holomorph im Sinne der Eigenschaft

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1 - 1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind ■

Vermerkt sei, dass aus der letzten Eigenschaft sofort die Beziehung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{n}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^{n-1}(m_1, m_2) \\ P_1^{n-1}(m_1 - 1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt. Auf Grund der Faktorisierung des Laplaceoperators ist damit gezeigt, dass die Polynome auch diskret harmonisch sind.

Zusätzlich interessiert im Hinblick auf die weitere Verwendung der Polynome die Frage, ob diese linear unabhängig sind. Dies wird hier zunächst in der gesamten Ebene untersucht. Bei der Einschränkung auf ein Gebiet G_h ist zu klären, wie groß die Dimension des Raumes der Basisfunktionen sein muss, da hier nur endlich viele Gitterpunkte vorhanden sind. Dieser Sachverhalt bedarf genauerer Untersuchungen und wird im Rahmen des bereits im Abschnitt 2.3.3 angesprochenen Projektes analysiert.

In der Ebene kann gezeigt werden, dass

$$\begin{pmatrix} P_0(m_1, m_2) \\ P_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} := \sum_{i=0}^n a_i \begin{pmatrix} P_0^i(m_1, m_2) \\ P_1^i(m_1, m_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur dann für alle (m_1, m_2) gilt, wenn alle a_i mit $i = 0, \dots, n$ identisch Null sind. Auf Grund der Struktur der Polynome gilt zunächst

$$\begin{pmatrix} P_0(0, 0) \\ P_1(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Realteil nur im Fall $a_0 = 0$ identisch Null. Auf Grund der Appell-Eigenschaft der Polynome und der Einführung eines Shift-Operators, der lediglich den Übergang vom Gitterpunkt $(m_1 - 1, m_2)$ zum Gitterpunkt (m_1, m_2) realisiert, ist die Identität

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} - h D_h^1 D_h^{-2} & D_h^{-1} + h D_h^1 D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(m_1, m_2) \\ P_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n i a_i \begin{pmatrix} P_0^{i-1}(m_1, m_2) \\ P_1^{i-1}(m_1, m_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

speziell im Gitterpunkt $(m_1, m_2) = (0, 0)$ nur dann erfüllt, wenn $a_1 = 0$ gilt. Schließlich kann durch wiederholte Anwendung des modifizierten Differenzenoperators gezeigt werden, dass für alle a_i , $i = 0, \dots, n$ die Beziehung $a_i = 0$ gelten muss.

Vom kontinuierlichen Fall weiss man, dass Polynome nicht nur nach Potenzen von z , sondern auch nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelt werden können, wobei z_0 eine beliebig festgelegte komplexe Zahl ist. Gezeigt wird im folgenden, dass sich diese Herangehensweise auch auf den diskreten Fall übertragen lässt. Es sei $N = N_1 \cdot N_2$. Untersucht wird für fest gewählten Polynomgrad $n = N - 1$ die Identität

$$\sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} a_{n_1, n_2} \begin{pmatrix} P_0^n(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \\ P_1^n(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Gleichung werden n weitere Gleichungen hinzugefügt, indem jeweils auf die zuletzt erhaltene Gleichung der modifizierte Differenzenoperator

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} - hD_h^1 D_h^{-2} & D_h^{-1} + hD_h^1 D_h^{-1} \end{pmatrix}$$

angewendet wird. Auf Grund der Appell-Eigenschaft nimmt der Polynomgrad von Gleichung zu Gleichung ab. Schreibt man nun das gesamte Gleichungssystem in Matrixschreibweise mit komplexen Elementen, so erkennt man auf Grund der nur aus Nullen bestehenden rechten Seite, dass alle a_{n_1, n_2} identisch Null sind, wenn die aus den Polynomen bestehende Matrix eine von Null verschiedene Determinante besitzt. Daher ist es ausreichend, die Struktur dieser Matrix genauer zu untersuchen. Durch einfaches Transponieren der Matrix wird ersichtlich, dass es sich hier um eine Vandermonde-Matrix handelt. Indem man die Spaltenvektoren dieser transponierten Matrix untersucht, kann gezeigt werden, dass diese linear unabhängig sind. Man bildet eine Linearkombination der Spaltenvektoren und betrachtet das so entstehende Problem zeilenweise. In den einzelnen Zeilen stehen jeweils Polynome aufsteigenden Grades in ein und demselben Gitterpunkt. Für diese Polynome wurde die lineare Unanhängigkeit bereits gezeigt, so dass insgesamt auf die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren geschlossen werden kann.

Abschließend soll kurz auf die Orthogonalisierung der Polynome mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eingegangen werden. Für die Polynome $P^n(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1, m_2) \end{pmatrix}$ und $P^m(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} P_0^m(m_1, m_2) \\ P_1^m(m_1, m_2) \end{pmatrix}$ wird das Skalarprodukt

$$\langle P^n, P^m \rangle = \sum_{m \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} P_0^n(m_1, m_2) \\ P_1^n(m_1, m_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_0^m(m_1, m_2) \\ P_1^m(m_1, m_2) \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zur konkreten Arbeit mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren wird als diskretes Gebiet ein Quadrat mit 9 inneren Gitterpunkten und

dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt gewählt. Für die praktischen Berechnungen stellt sich die Frage, ob die so orthogonalisierten Polynome auch orthogonale Polynome sind, wenn das Ausgangsquadrat mit 9 inneren Gitterpunkten um jeweils eine Schicht von Gitterpunkten erweitert wird. Es zeigt sich, dass das tatsächlich für die ersten Polynome $P^1(m_1, m_2)$, $P^2(m_1, m_2)$ sowie

$$\begin{pmatrix} P_0^0(m_1, m_2) \\ P_1^0(m_1, m_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zutrifft. Die Berechnungen haben aber verdeutlicht, dass bei allen weiteren Polynomen zusätzlich zur Veränderung der Norm auch Veränderungen in den Koeffizienten auftreten, wenn diese auch zum Teil sehr gering ausfallen. Geführt wurde der Beweis mittels vollständiger Induktion beginnend mit der Orthogonalisierung im Ausgangsquadrat mit 9 inneren Gitterpunkten.

2.6.2 Diskrete Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen

In Vorbereitung auf das Kapitel 3 wird nach einer Diskretisierung der Exponentialfunktion gesucht. Begonnen wird mit dem eindimensionalen Fall und der Suche nach einer Funktion, deren Differenzenableitung mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt.

Lemma 2.6.1 *Im eindimensionalen Fall gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned} D_h^1(1+h)^{m_1} &= (1+h)^{m_1} & D_h^{-1}(1-h)^{-m_1} &= (1-h)^{-m_1} \\ D_h^1(1-h)^{m_1} &= -(1-h)^{m_1} & D_h^{-1}(1+h)^{-m_1} &= -(1+h)^{-m_1}. \end{aligned}$$

Beweis: Genauer untersucht wird die erste Gleichung. Die restlichen Beziehungen können auf analoge Weise gezeigt werden. Mit Hilfe der Definition der Vorwärtsableitung erhält man

$$D_h^1(1+h)^{m_1} = h^{-1}[(1+h)^{m_1+1} - (1+h)^{m_1}] = h^{-1}(1+h)^{m_1}(1+h-1) = (1+h)^{m_1} \quad \blacksquare$$

Die soeben in Lemma 4.2.1 betrachtete Funktion $(1+h)^{m_1}$ soll noch ausführlicher studiert werden. Aus dem binomischen Satz folgt

$$\begin{aligned} (1+h)^{m_1} &= \sum_{k=0}^{m_1} \binom{m_1}{k} h^k \\ &= 1 + m_1 h + \frac{m_1 h \cdot (m_1 - 1) h}{2!} + \frac{m_1 h \cdot (m_1 - 1) h \cdot (m_1 - 2) h}{3!} + \dots + m_1 h^{m_1-1} + h^{m_1}. \end{aligned}$$

Da andererseits die Exponentialfunktion im kontinuierlichen Fall in die unendliche Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ entwickelt werden kann, liegt es nahe, Polynome der Gestalt

$$x_+^n = \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) h$$

zu betrachten. Diese Polynome haben die Eigenschaft $D_h^1 x_+^n = n x_+^{n-1}$, da gilt

$$\begin{aligned} D_h^1 x_+^n &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (m_1 + 1 - k) h - \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - (k-1)) h - \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=-1}^{n-2} (m_1 - k) h - \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - k) h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-2} (m_1 - k) h \right) \left((m_1 + 1)h - (m_1 - (n-1))h \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot x_+^{n-1} \cdot n \cdot h . \end{aligned}$$

In Analogie zu diesen Überlegungen gelangt man mit Polynomen der Form

$$x_-^n = \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 + k) h$$

zur Beziehung

$$\begin{aligned} D_h^{-1} x_-^n &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (m_1 + k) h - \prod_{k=0}^{n-1} (m_1 - 1 + k) h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (m_1 + k) h - \prod_{k=-1}^{n-2} (m_1 + k) h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\prod_{k=0}^{n-2} (m_1 + k) h \right) \left((m_1 + (n-1))h - (m_1 - 1)h \right) \\ &= n \cdot x_-^{n-1} . \end{aligned}$$

Wie bereits einleitend zum Abschnitt 2.6 erläutert, sind die hier betrachteten Polynome identisch mit den von Faustino und anderen Autoren verwendeten Polynomen. Sie bildeten die Grundlage für die Konstruktion der diskret holomorphen Polynome aus dem Satz 2.6.1.

Wie gelangt man nun aber vom eindimensionalen Fall zu einer diskret holomorphen Exponentialfunktion im komplexen Fall? Man versucht, den eindimensionalen Fall zu abstrahieren und dabei zwei Eigenschaften zu sichern:

Einerseits soll diese Funktion diskret holomorph sein. Man sucht daher nach einer Funktion $\text{EXP}_h(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) \\ \text{EXP}_h^1(m_1, m_2) \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft

$$D^{1h} \text{EXP}_h = 0.$$

Andererseits soll die komplexe Ableitung der Funktion wieder die Funktion selbst ergeben. Bereits im Abschnitt 2.2.2 wurde erwähnt, dass der Operator D^{2h} gegen $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ konvergiert. Ausgehend von $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ soll die gesuchte diskrete Funktion daher die Eigenschaft

$$\frac{1}{2} D^{2h} \text{EXP}_h = \text{EXP}_h$$

besitzen. Die im folgenden vorgestellte Funktion erfüllt im wesentlichen diese Anforderungen, auch wenn teilweise Nachbargitterpunkte mit einbezogen werden.

Satz 2.6.2 *Die Funktion $\text{EXP}_h(m_1, m_2)$ mit*

$$\begin{aligned} \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) &= \frac{1}{2}(1+h)^{m_1-1}[(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1}] \\ \text{EXP}_h^1(m_1, m_2) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}(1+h)^{m_1}[(1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \end{aligned}$$

besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} D_h^{-1} \text{EXP}_h^0(m_1+1, m_2-1) - D_h^2 \text{EXP}_h^1(m_1-1, m_2) &= 0 \\ D_h^{-2} \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) + D_h^1 \text{EXP}_h^1(m_1-1, m_2) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} D_h^1 \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) + \frac{1}{2} D_h^2 \text{EXP}_h^1(m_1, m_2) \\ &= \frac{1}{2} [\text{EXP}_h^0(m_1, m_2) + \text{EXP}_h^0(m_1+1, m_2-1)] \end{aligned}$$

sowie

$$-\frac{1}{2} D_h^{-2} \text{EXP}_h^0(m_1+1, m_2) + \frac{1}{2} D_h^{-1} \text{EXP}_h^1(m_1+1, m_2) = \text{EXP}_h^1(m_1, m_2).$$

Beweis: Begonnen wird mit der ersten Eigenschaft. Hier gilt

$$\begin{aligned} &D_h^{-1} \text{EXP}_h^0(m_1+1, m_2-1) - D_h^2 \text{EXP}_h^1(m_1-1, m_2) \\ &= \frac{1}{2h} [(1+h)^{m_1} - (1+h)^{m_1-1}] [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\ &\quad - \frac{1}{2\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1-1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1+\mathbf{i}h)^{m_2} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\ &= \frac{1}{2h} (1+h)^{m_1-1} (1+h-1) [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\ &\quad - \frac{1}{2\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1-1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} (1+\mathbf{i}h-1) + (1-\mathbf{i}h)^{m_2} (-1+\mathbf{i}h+1)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Eigenschaft ergibt sich

$$\begin{aligned}
& D_h^{-2} \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) + D_h^1 \text{EXP}_h^1(m_1 - 1, m_2) \\
&= \frac{1}{2h} (1+h)^{m_1-1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&\quad + \frac{1}{2\mathbf{i}h} [(1+h)^{m_1} - (1+h)^{m_1-1}] [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&= \frac{1}{2h} (1+h)^{m_1-1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} ((1+\mathbf{i}h-1) - (1-\mathbf{i}h)^{m_2} (-1+\mathbf{i}h+1))] \\
&\quad + \frac{1}{2\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1-1} (1+h-1) [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Untersucht wird nun die dritte Eigenschaft. Man erhält

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} D_h^1 \text{EXP}_h^0(m_1, m_2) + \frac{1}{2} D_h^2 \text{EXP}_h^1(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{4h} [(1+h)^{m_1} - (1+h)^{m_1-1}] [(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1}] \\
&\quad + \frac{1}{4\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1+\mathbf{i}h)^{m_2} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&= \frac{1}{4h} (1+h)^{m_1-1} (1+h-1) [(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1}] \\
&\quad + \frac{1}{4\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} ((1+\mathbf{i}h-1) + (1-\mathbf{i}h)^{m_2} (-1+\mathbf{i}h+1))].
\end{aligned}$$

Schließlich wird die letzte Eigenschaft betrachtet.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} D_h^{-2} \text{EXP}_h^0(m_1 + 1, m_2) + \frac{1}{2} D_h^{-1} \text{EXP}_h^1(m_1 + 1, m_2) \\
&= \frac{1}{4h} (1+h)^{m_1} [-(1+\mathbf{i}h)^{m_2+1} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2+1} + (1+\mathbf{i}h)^{m_2} + (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&\quad + \frac{1}{4\mathbf{i}h} [(1+h)^{m_1+1} - (1+h)^{m_1}] [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \\
&= \frac{1}{4h} (1+h)^{m_1} [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} (-1-\mathbf{i}h+1) - (1-\mathbf{i}h)^{m_2} (1-\mathbf{i}h-1)] \\
&\quad + \frac{1}{4\mathbf{i}h} (1+h)^{m_1} (1+h-1) [(1+\mathbf{i}h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}h)^{m_2}] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Im Mittelpunkt steht nun die Diskretisierung der Sinus- und Cosinusfunktion. Begonnen wird wieder mit dem eindimensionalen Fall. Ausgehend von den Beziehungen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x})$ gelangt man zu den im folgenden Lemma untersuchten diskreten Sinus- und Cosinusfunktionen.

Lemma 2.6.2 *Die diskreten Funktionen $\cos_h^+(m_1) = \frac{1}{2}[(1+\mathbf{i}h)^{m_1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_1}]$ und $\sin_h^+(m_1) = \frac{1}{2\mathbf{i}}[(1+\mathbf{i}h)^{m_1} - (1-\mathbf{i}h)^{m_1}]$ haben die Eigenschaften*

$$\begin{aligned}
D_h^1 D_h^1 \cos_h^+(m_1) &= -D_h^1 \sin_h^+(m_1) = -\cos_h^+(m_1) \quad \text{und} \\
D_h^1 D_h^1 \sin_h^+(m_1) &= D_h^1 \cos_h^+(m_1) = -\sin_h^+(m_1).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Funktionen $\cos_h^-(m_1) = \frac{1}{2}[(1 - \mathbf{i}h)^{-m_1} + (1 + \mathbf{i}h)^{-m_1}]$ und $\sin_h^-(m_1) = \frac{1}{2\mathbf{i}}[(1 - \mathbf{i}h)^{-m_1} - (1 + \mathbf{i}h)^{-m_1}]$

$$\begin{aligned} D_h^{-1} D_h^{-1} \cos_h^-(m_1) &= -D_h^{-1} \sin_h^-(m_1) = -\cos_h^-(m_1) \quad \text{und} \\ D_h^{-1} D_h^{-1} \sin_h^-(m_1) &= D_h^{-1} \cos_h^-(m_1) = -\sin_h^-(m_1). \end{aligned}$$

Zusätzlich erhält man die Eigenschaften

$$\begin{aligned} (\cos_h^+(m_1))^2 + (\sin_h^+(m_1))^2 &= (1 + h^2)^{m_1} \\ (\cos_h^-(m_1))^2 + (\sin_h^-(m_1))^2 &= (1 + h^2)^{-m_1}, \end{aligned}$$

wobei die rechten Seiten für $h \rightarrow 0$ gegen 1 konvergieren und das Produkt der beiden linken Seiten exakt 1 ergibt.

Der Beweis von Lemma 2.6.2 beruht genau wie der Beweis von Lemma 2.6.1 auf einfachen Berechnungen unter Verwendung der Vorwärts- und Rückwärtsableitungen. Nun läßt sich nachträglich auch erklären, woher der Ansatz für die komplexe Exponentialfunktion im Satz 2.6.2 kommt. Er beruht auf der Überlegung $e^z = e^{x+\mathbf{i}y} = e^x(\cos(x) + \mathbf{i}\sin(x))$.

Erfreulicherweise kann man im komplexen Fall ausgehend von der Beziehung

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{i}x-y} + e^{-\mathbf{i}x+y}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x + \frac{\mathbf{i}}{2}(e^{-y} - e^y) \sin x$$

eine diskrete Cosinusfunktion $\text{COS}_h(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} \text{COS}_h^0(m_1, m_2) \\ \text{COS}_h^1(m_1, m_2) \end{pmatrix}$ definieren, die selbst bei der speziellen Kombination der Gitterpunkte hervorragend zur Exponentialfunktion im Satz 2.6.2 passt. Durch Anwendung des Operators $\frac{1}{2}D^{2h}$ wird die dazugehörige diskrete Sinusfunktion $\text{SIN}_h(m_1, m_2)$ erklärt.

Satz 2.6.3 Die Funktion $\text{COS}_h(m_1, m_2)$ mit

$$\begin{aligned} \text{COS}_h^0(m_1, m_2) &= \frac{1}{4}[(1 - h)^{m_2+1} + (1 + h)^{m_2+1}][(1 + \mathbf{i}h)^{m_1-1} + (1 - \mathbf{i}h)^{m_1-1}] \\ \text{COS}_h^1(m_1, m_2) &= \frac{1}{4\mathbf{i}}[(1 - h)^{m_2} - (1 + h)^{m_2}][(1 + \mathbf{i}h)^{m_1} - (1 - \mathbf{i}h)^{m_1}] \end{aligned}$$

besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} D_h^{-1} \text{COS}_h^0(m_1 + 1, m_2 - 1) - D_h^2 \text{COS}_h^1(m_1 - 1, m_2) &= 0 \\ D_h^{-2} \text{COS}_h^0(m_1, m_2) + D_h^1 \text{COS}_h^1(m_1 - 1, m_2) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2} D^{2h} \text{COS}_h(m_1, m_2) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[\text{SIN}_h^0(m_1, m_2) + \text{SIN}_h^0(m_1 + 1, m_2 - 1)] \\ \text{SIN}_h^1(m_1 - 1, m_2) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{SIN}_h^0(m_1, m_2) &= \frac{1}{4\mathbf{i}}[(1+h)^{m_2+1} + (1-h)^{m_2+1}][(1+\mathbf{i}h)^{m_1-1} - (1-\mathbf{i}h)^{m_1-1}] \\ \text{SIN}_h^1(m_1, m_2) &= \frac{1}{4}[(1+h)^{m_2} - (1-h)^{m_2}][(1+\mathbf{i}h)^{m_1} + (1-\mathbf{i}h)^{m_1}]. \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man

$$\begin{aligned} D_h^{-1} \text{SIN}_h^0(m_1+1, m_2-1) - D_h^2 \text{SIN}_h^1(m_1-1, m_2) &= 0 \\ D_h^{-2} \text{SIN}_h^0(m_1, m_2) + D_h^1 \text{SIN}_h^1(m_1-1, m_2) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2} D^{2h} \text{SIN}_h(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\text{COS}_h^0(m_1, m_2) + \text{COS}_h^0(m_1+1, m_2-1)] \\ \text{COS}_h^1(m_1-1, m_2) \end{pmatrix}.$$

Der Satz zeigt, dass es auch für trigonometrische Funktionen möglich ist, diskret holomorphe Funktionen zu konstruieren. Bei der Anwendung des Operators D^{2h} tritt bei den beiden Summanden in der ersten Komponente jeweils nur eine Verschiebung in den Gitterpunkten auf, die ein Zusammenfassen verhindert. Somit wird auch in diesem Fall die gewünschte Eigenschaft hervorragend repräsentiert.

Der Beweis von Satz 2.6.3 verläuft völlig analog zu den Beweisschritten im Satz 2.6.2.

Darüber hinaus gilt beispielsweise

$$\frac{1}{4} D^{2h} D^{2h} \text{SIN}_h(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} -\text{SIN}_h^0(m_1(m_2-1) + O(h)) \\ -\text{SIN}_h^1(m_1-2, m_2-1) + O(h) \end{pmatrix}.$$

Außerdem behält die Euler-Identität $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z$ auch im diskreten Fall ihre Gültigkeit. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft definiert man die Funktion $\text{EXP}_h(\mathbf{i}m_1, \mathbf{i}m_2)$ mit

$$\text{EXP}_h^0(\mathbf{i}m_1, \mathbf{i}m_2) = \frac{1}{2}(1+\mathbf{i}h)^{m_1-1}[(1+\mathbf{i}^2h)^{m_2+1} + (1-\mathbf{i}^2h)^{m_2+1}]$$

und

$$\text{EXP}_h^1(\mathbf{i}m_1, \mathbf{i}m_2) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(1+\mathbf{i}h)^{m_1}[(1+\mathbf{i}^2h)^{m_2} - (1-\mathbf{i}^2h)^{m_2}].$$

Durch einfaches Zusammenfassen der Ausdrücke erhält man

$$\text{COS}_h(m_1, m_2) + \mathbf{i} \text{SIN}_h(m_1, m_2) = \text{EXP}_h(\mathbf{i}m_1, \mathbf{i}m_2).$$

Die hier vorgestellten diskret holomorphen Funktionen bilden die Grundlage für die Lösung von Differenzengleichungen im nächsten Kapitel. So ist beispielsweise

die diskrete Exponentialfunktion als unmittelbare Grundlage für die Erweiterung der Theorie der diskreten Cauchy-Riemann-Operatoren im Sinne von Vekua zu betrachten. Um einen Ausblick zu geben, wie die diskrete Theorie vom komplexen Fall auf den hyperkomplexen Fall übertragen werden kann, wird auch im Abschnitt 4.1 die Exponentialfunktion wieder im Mittelpunkt stehen. Hier jedoch aus Sicht der klassischen Theorie, um zunächst erst einmal die Arbeitsgrundlage für die Diskretisierung zu schaffen. Dabei werden wichtige Eigenschaften der Funktionen, die eine Verallgemeinerung der komplexen Theorie erlauben, gezielt berücksichtigt. Unter dem gleichen Gesichtspunkt werden im Abschnitt 4.2 Sinus- und Cosinusfunktionen im höherdimensionalen Fall diskutiert. Insgesamt ist damit die Basis geschaffen, um im Kapitel 4 Aussagen zu Fourierreihen und einer auf den studierten Funktionen beruhenden hyperkomplexen Fouriertransformation zu formulieren.

Kapitel 3

Lösung von Differenzengleichungen mit Hilfe diskret holomorpher Funktionen

3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden zunächst Gleichungen erster Ordnung betrachtet. Den Hauptschwerpunkt zu Beginn des Kapitels bilden die Vekua-Gleichungen. Seit der Einführung der Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen durch Vekua [Vek] spielen sie eine bedeutende Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Sie erweitern die Möglichkeiten der komplexen Analysis und verdeutlichen den Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Methoden. Der Vorteil komplexer Methoden liegt darin, dass die Lösung von Gleichungen auf die Lösung der Cauchy-Riemann-Gleichungen zurückgeführt werden kann. Gleichungen erster Ordnung spielen auch bei der Transformation von Gleichungen höherer Ordnung eine wesentliche Rolle. Dabei verwendet man verschiedene Methoden wie beispielsweise Dekompositionsmethoden oder spezielle Ansätze. Auf diesen Sachverhalt wird im Abschnitt 3.2.2 im Zusammenhang mit der Untersuchung der diskreten Beltrami-Gleichung und dem zur Lösungsdarstellung verwendeten diskreten Π -Operator noch einmal genauer eingegangen.

Anschließend werden im Abschnitt 3.3 Gleichungen zweiter und höherer Ordnung betrachtet. Stellvertretend sollen hier als typische Vertreter die biharmonische Gleichung, Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen, Lamé-Gleichungen und die diskrete Schrödingergleichung untersucht werden. Eine wichtige Rolle in diesem Abschnitt spielt der Satz von Goursat, mit dessen Hilfe es gelingt, die Lösung der biharmonischen Gleichung mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen darzustellen.

Dieser Satz ist gleichzeitig das entscheidende Bindeglied zwischen linearer Elastizitätstheorie und komplexer Funktionentheorie. Bei der Untersuchung des Stokesproblem es im Abschnitt 3.3.1 wird die orthogonale Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ gezielt genutzt. Es kann gezeigt werden, dass die Lösung des diskreten Lamésystems gegen die Lösung des diskreten Stokesproblem es konvergiert.

Im Unterschied zur klassischen Theorie sind im diskreten Fall einige Abweichungen zu beachten. Beispielsweise führt die Multiplikation aus der Menge der diskret holomorphen Funktionen heraus. Auch hat die Produktregel bei der Differentiation von Funktionen, die nur in Gitterpunkten definiert sind, eine etwas andere Gestalt. Hier trifft man auf ähnliche Probleme, wie sie aus der harmonischen Analysis bekannt sind. Es ist daher naheliegend, Ideen und Herangehensweisen aus dieser Theorie aufzunehmen und für den Aufbau der eigenen Theorie zu nutzen.

3.2 Gleichungen erster Ordnung

3.2.1 Diskrete Vekuagleichungen

3.2.1.1 Vorbemerkungen

Einerseits verallgemeinern Vekuagleichungen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, deren Operatoren im Kapitel 2 analysiert wurden. Dies ist ein Grund, warum sie an dieser Stelle ausführlich studiert werden sollen. Andererseits erweitern Sie das Konzept der komplexen Differenzierbarkeit.

Vekuagleichungen werden auch Carleman-Bers-Vekuagleichungen (oder Systeme) genannt, da Carleman [Car] mit seiner Untersuchung von allgemeinen Systemen erster Ordnung und Bers [Be] mit seiner Theorie der pseudoanalytischen Funktionen wesentlich zum Aufbau dieser Theorie beigetragen haben. Auch Kravchenko weist in seinem Buch [Kr1] auf die Bedeutung der pseudoanalytischen Funktionen für die Lösung von Schrödinger-, Dirac-, Maxwell-, Klein-Gordan- und anderen Gleichungen auf der Basis komplexanalytischer Methoden hin. Der Zusammenhang zwischen Vekuagleichung und Schrödingergleichung in der diskreten Theorie wird vor allem im Satz 3.3.6 deutlich werden.

Im Abschnitt 3.2.1 wird der Bezeichnungsweise von Vekua folgend eine diskrete Methode zur Lösung der entsprechenden Differenzengleichungen vorgestellt. Dabei ist zu beachten, dass diskret holomorphe Funktionen keine Algebra bilden. Die Untersuchungen stützen sich auf vielfältige Erfahrungen auf dem Gebiet der Differenzenverfahren und der diskreten Potentialtheorie (siehe [D1], [Rya] und [Ho]), der Berechnung diskreter Fundamentallösungen (siehe [So1], [Th]) und der diskreten Funktionentheorie (siehe [GS2], [Ho], [Zei]).

Ziel ist es, die allgemeine Struktur der Lösung der Differenzengleichungen zu beschreiben. Dabei gelingt es unter Verwendung der Matrixschreibweise für spezielle Klassen von Lösungen eine Produktdarstellung zu finden, bei der ein Faktor eine diskret holomorphe Funktion ist und der andere Faktor eine Exponentialfunktion approximiert. Hier wird die Analogie zum kontinuierlichen Fall deutlich, da die in der Theorie von Bers als Ähnlichkeitsprinzip beschriebene Vorgehensweise auch hier zum tragenden Element der Theorie wird, indem die Struktur der Lösung mit ins Diskrete übertragen wird. Die Aussicht auf die Gültigkeit dieses Ähnlichkeitsprinzips ist ein weiterer Grund, warum gerade Vekuagleichungen in dieser Arbeit so ausführlich studiert werden. Viele der hier vorgestellten Resultate wurden bereits in den Arbeiten [GH6] und [GH7] veröffentlicht.

3.2.1.2 Vekuagleichungen in der klassischen Theorie

Es seien $w(z)$ eine komplexwertige Funktion mit $z = x + \mathbf{i}y$, $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet in der komplexen Ebene und G^* eine Menge isolierter Punkte bezüglich G . Als Vekuagleichung bezeichnet man die Differentialgleichung

$$\partial_{\bar{z}}w + Aw + B\bar{w} = F, \quad (3.1)$$

mit $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ und $F \in L_p(G)$. Wenn $w(z)$ in jedem Punkt der Menge $G \setminus G^*$ die Gleichung (3.1) erfüllt, so wird diese Lösung als verallgemeinerte Lösung bezeichnet. Ist G^* leer, so heißt $w(z)$ reguläre Lösung. Die Klasse der verallgemeinerten und regulären Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3.1) ist eine lineare Mannigfaltigkeit über dem Körper der reellen Zahlen. Falls also $w_1(z)$ und $w_2(z)$ zu dieser Klasse gehören, so gehört auch $c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zu dieser Klasse.

Im folgenden sei E der Einheitskreis mit $|z| \leq 1$ und $L_{p,2}(\mathbb{R}^2)$ eine Menge von Funktionen mit den Eigenschaften $f(z) \in L_p(E)$ und $|z|^{-2} f(1/\bar{z}) \in L_p(E)$ für $p \geq 1$. Definiert wird

$$g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \overline{\frac{w(z)}{w(z)}} & \text{für } w(z) \neq 0, z \in G \\ A(z) + B(z) & \text{für } w(z) = 0, z \in G. \end{cases}$$

Wenn die Koeffizienten A und B die Bedingungen $A, B \in L_{p,2}(\mathbb{R}^2)$ für $p > 2$ erfüllen, dann kann jede verallgemeinerte Lösung der Gleichung (3.1) in der Form

$$w(z) = \Phi(z) e^{\nu(z)} \quad (3.2)$$

geschrieben werden, wobei Φ eine in G holomorphe Funktion ist und

$$\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\mu \in C_{(p-2)/p} \quad \text{für } p > 2$$

mit $\zeta = \xi + \mathbf{i}\mu$ gilt. Gleichung (3.2) wird in der Theorie von Bers Ähnlichkeitsprinzip genannt. Mit Hilfe dieser Formel können viele Eigenschaften analytischer Funktionen aus der klassischen Funktionentheorie auf verallgemeinerte Lösungen der Gleichung (3.1) übertragen werden.

3.2.1.3 Das homogene diskrete Problem im allgemeinen Fall

Betrachtet wird wieder ein gleichmäßiges Gitter der Schrittweite h . Die im folgenden gewählte Bezeichnungsweise stimmt mit der Symbolik im Abschnitt 2.3.1 überein.

Untersucht werden komplexwertige Funktionen

$$w(m) = (w_0(m), w_1(m))^T = (\operatorname{Re} w(m), \operatorname{Im} w(m))^T.$$

Zur Vereinfachung des zu (3.1) gehörenden diskreten Problems sei $A = a_1 + \mathbf{i}a_2$ sowie $B = b_1 + \mathbf{i}b_2$. Von den Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2 wird gefordert, dass sie innerhalb des Gebietes $G_h \cup \gamma_h^-$ konstant sind und in den Gitterpunkten von $\mathbb{R}_h^2 \setminus (G_h \cup \gamma_h^-)$ identisch Null sind. Ohne diese Einschränkung würde die Anwendung des Differenzenoperators auf $w(m)$ sehr aufwendig werden.

Auf Grund des Gruppenhomomorphismus zwischen komplexen Zahlen und Matrizen kann Gleichung (3.1) durch das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ -w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

für alle $m \in G_h$ approximiert werden. In Analogie zu den Ausführungen im Abschnitt 2.6.2 wird zur Diskretisierung des Operators $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)$ der Differenzenoperator $\frac{1}{2} D^{1h}$ genutzt.

Betont sei an dieser Stelle noch einmal, dass Funktionen $w(m)$ mit der Eigenschaft $D^{1h} D^{2h} w(m) = 0$ für alle $m \in G_h$ diskret harmonisch heißen. Ist in allen Gitterpunkten die Eigenschaft $D^{1h} w(m) = 0$ erfüllt, dann wird $w(m)$ diskret holomorph genannt.

Um eine diskrete Theorie entwickeln zu können, die auf dem Ähnlichkeitsprinzip beruht, interessieren wie bereits erwähnt Lösungen des homogenen Systems (3.3), die ein Produkt zweier Faktoren darstellen, von denen ein Faktor diskret holomorph ist und der zweite Faktor im Idealfall eine Exponentialfunktion approximiert. Dieses Problem wird im weiteren sehr ausführlich untersucht. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Diskretisierung der Exponentialfunktion aus dem Lemma 2.6.1. Mit Hilfe der in diesem Lemma bewiesenen Eigenschaften wird zunächst eine spezielle Lösung des homogenen Gleichungssystems (3.3) berechnet, die jedoch noch nicht die angestrebte Darstellung aufweist.

Lemma 3.2.1 *Das System*

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ -w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

besitzt die spezielle Lösung $w_0(m) = (1 + 2(a_1 + b_1)h)^{-m_1} (1 + 2(a_2 + b_2)h)^{-m_2}$ und $w_1(m) = (1 - 2(a_1 - b_1)h)^{m_1} (1 - 2(a_2 - b_2)h)^{m_2}$.

Beweis: Der Beweis wird anhand der ersten Zeile des Systems (3.4) vorgestellt. Dabei wird ein Koeffizientenvergleich bezüglich w_0 und w_1 durchgeführt. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_h^{-1} w_0(m) &= \frac{1}{2h} [(1 + 2(a_1 + b_1)h)^{-m_1} - (1 + 2(a_1 + b_1)h)^{-m_1+1}] (1 + 2(a_2 + b_2)h)^{-m_2} \\ &= \frac{1}{2h} (1 + 2(a_1 + b_1)h)^{-m_1} (1 + 2(a_2 + b_2)h)^{-m_2} [1 - 1 - 2(a_1 + b_1)h] = -(a_1 + b_1)w_0(m) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} D_h^2 w_1(m) &= \frac{1}{2h} [(1 - 2(a_2 - b_2)h)^{m_2} - (1 - 2(a_2 - b_2)h)^{m_2+1}] (1 - 2(a_1 - b_1)h)^{m_1} \\ &= \frac{1}{2h} (1 - 2(a_1 - b_1)h)^{m_1} (1 - 2(a_2 - b_2)h)^{m_2} [1 - 1 + 2(a_2 - b_2)h] = (a_2 - b_2)w_1(m). \end{aligned}$$

Addiert man alle weiteren Summanden auf der linken Seite des Systems entsprechend dem Koeffizientenvergleich, so ist die rechte Seite der ersten Gleichung identisch Null. Der Beweis für die zweite Zeile des Systems (3.4) wird völlig analog geführt ■

Um dem Ziel einer Produktdarstellung näher zu kommen, wird das Problem im folgenden Abschnitt zunächst auf den Fall $b_1 = b_2 = 0$ eingeschränkt.

3.2.1.4 Homogene diskrete Gleichungen im Fall $b_1 = b_2 = 0$

Gesucht wird nach Lösungen $(w_0(m), w_1(m))^T$ des erweiterten Gleichungssystems

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Der Raum der gesuchten Funktionen $(w_0(m), w_1(m))^T$ ist dabei offensichtlich ein Teilraum des Raumes der Funktionen, die Lösung des homogenen Problems (3.4) im Fall $b_1 = b_2 = 0$ sind. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die spezielle Lösung aus Lemma 3.2.1 jedoch nicht zu diesem Teilraum gehört. Wenn $w_1(m) = (w_0^1(m), w_1^1(m))^T$ und $w_2(m) = (w_0^2(m), w_1^2(m))^T$ zwei Lösungen des Problems (3.5) sind, sieht man jedoch leicht, dass auch $c_1 w_1(m) + c_2 w_2(m)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Problems ist.

Zu klären bleibt die Frage, ob die gewählte Erweiterung sich als sinnvoll erweist. Sie stellt immerhin eine Einschränkung dar.

Betont sei, dass der Ausgangspunkt das Gleichungssystem (3.4) im Fall $b_1 = b_2 = 0$ ist, zu dem zwei spezielle Gleichungen addiert wurden. Das so entstandene System (3.5) besteht aus vier Gleichungen. Es ist unschwer zu erkennen, dass die Gleichungen, die zum ersten und vierten Matrixelement gehören, für $h \rightarrow 0$ dieselbe Differentialgleichung approximieren. Derselbe Sachverhalt spiegelt sich in den Matrixkomponenten zwei und drei wieder. Aus diesem Gesichtspunkt ist das System (3.5) durchaus ein geeignetes Analogon zum kontinuierlichen Fall.

Mit Hilfe der Matrixdarstellung des Problems (3.5) kann das folgende wichtige Hauptresultat bewiesen werden, das erstmals auf eine Produktdarstellung hinweist.

Satz 3.2.1 *Es sei $w(m)$ eine beliebige Lösung des Problems (3.5) und $u(m)$ eine Lösung des Systems*

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_2 u_1(m_1, m_2 + 1) & -a_2 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_1 u_1(m_1, m_2 + 1) \\ a_2 u_0(m_1 + 1, m_2) + a_1 u_1(m_1 + 1, m_2) & a_1 u_0(m_1 + 1, m_2) - a_2 u_1(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $m \in G_h$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: In der ersten Matrixkomponente werden folgende Summanden addiert:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} D_h^{-1} [u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) - u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2)] \\ &= \frac{1}{2h} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) - \frac{1}{2h} u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) \\ &\quad - \frac{1}{2h} u_0(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1 - 1, m_2) + \frac{1}{2h} u_1(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1 - 1, m_2) \\ &\quad + \frac{1}{2h} u_0(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) - \frac{1}{2h} u_1(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) \\ &\quad - \frac{1}{2h} u_0(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) + \frac{1}{2h} u_1(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) \\ &= \frac{1}{2} u_0(m_1, m_2 + 1) [D_h^{-1} w_0(m_1, m_2)] - \frac{1}{2} u_1(m_1, m_2 + 1) [D_h^{-1} w_1(m_1, m_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} w_0(m_1, m_2) [D_h^{-1} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)] - \frac{1}{2} w_1(m_1, m_2) [D_h^{-1} u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
S_2 &= -\frac{1}{2}D_h^2[u_1(m_1, m_2)w_0(m_1, m_2) + u_0(m_1, m_2)w_1(m_1, m_2)] \\
&= \frac{1}{2h}u_1(m_1, m_2)w_0(m_1, m_2) + \frac{1}{2h}u_0(m_1, m_2)w_1(m_1, m_2) \\
&\quad - \frac{1}{2h}u_1(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2 + 1) - \frac{1}{2h}u_0(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2 + 1) \\
&\quad + \frac{1}{2h}u_1(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) + \frac{1}{2h}u_0(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) \\
&\quad - \frac{1}{2h}u_1(m_1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) - \frac{1}{2h}u_0(m_1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{2}u_1(m_1, m_2 + 1)[-D_h^2w_0(m_1, m_2)] + \frac{1}{2}u_0(m_1, m_2 + 1)[-D_h^2w_1(m_1, m_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2}w_0(m_1, m_2)[-D_h^2u_1(m_1, m_2)] + \frac{1}{2}w_1(m_1, m_2)[-D_h^2u_0(m_1, m_2)].
\end{aligned}$$

In der Summe erhält man

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &= \frac{1}{2}u_0(m_1, m_2 + 1)[D_h^{-1}w_0(m_1, m_2) - D_h^2w_1(m_1, m_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1(m_1, m_2 + 1)[-D_h^{-1}w_1(m_1, m_2) - D_h^2w_0(m_1, m_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2}w_0(m_1, m_2)[D_h^{-1}u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - D_h^2u_1(m_1, m_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2}w_1(m_1, m_2)[-D_h^{-1}u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - D_h^2u_0(m_1, m_2)] \\
&= u_0(m_1, m_2 + 1)[-a_1 w_0(m_1, m_2) + a_2 w_1(m_1, m_2)] \\
&\quad + u_1(m_1, m_2 + 1)[a_1 w_1(m_1, m_2) + a_2 w_0(m_1, m_2)] \\
&\quad + w_0(m_1, m_2)[a_1 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_2 u_1(m_1, m_2 + 1)] \\
&\quad + w_1(m_1, m_2)[-a_2 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_1 u_1(m_1, m_2 + 1)] = 0.
\end{aligned}$$

Völlig analog ergibt sich in der zweiten Matrixkomponente

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}D_h^{-1}[-u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) - u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2)] \\
&- \frac{1}{2}D_h^2[-u_1(m_1, m_2)w_1(m_1, m_2) + u_0(m_1, m_2)w_0(m_1, m_2)] = 0
\end{aligned}$$

sowie in den restlichen beiden Komponenten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}D_h^{-2}[u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2) - u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2)] \\
&+ \frac{1}{2}D_h^1[u_1(m_1, m_2)w_0(m_1, m_2) + u_0(m_1, m_2)w_1(m_1, m_2)] = 0
\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}D_h^{-2}[-u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)w_1(m_1, m_2) - u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)w_0(m_1, m_2)]$$

$$+\frac{1}{2}D_h^1[-u_1(m_1, m_2)w_1(m_1, m_2) + u_0(m_1, m_2)w_0(m_1, m_2)] = 0 \quad \blacksquare$$

Das Produkt der Matrizen bezüglich $u(m)$ und $w(m)$ in Satz 3.2.1 kann als Matrixdarstellung einer diskret holomorphen Funktion $\Phi(m)$ aufgefasst werden. Damit ist ein erster Schritt im Hinblick auf die Gültigkeit eines Ähnlichkeitsprinzips in der diskreten Theorie gelungen. Behält man den kontinuierlichen Fall und die Darstellung (3.2) im Auge, so gelangt man nach dem Schritt $u(z) \cdot w(z) = \Phi(z)$ zur Darstellung $w(z) = (u(z))^{-1} \cdot \Phi(z)$. Im Sinne der diskreten Theorie stellt sich also die Frage, ob eine Lösung $u(m)$ für das im Satz 3.2.1 formulierte Gleichungssystem existiert und ob es möglich ist, die dazugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix}$$

zu invertieren.

Betont sei an dieser Stelle auch, dass die Hauptschwierigkeit im Satz 3.2.1 darin bestand, die Probleme mit der im diskreten Fall geltenden Produktformel für den Operator D_h^1 (und ebenso für alle anderen Differenzenoperatoren) zu meistern. In dieser Produktformel

$$\begin{aligned} & D_h^1(u_i(m_1, m_2)v_k(m_1, m_2)) \\ &= u_i(m_1 + 1, m_2) D_h^1 v_k(m_1, m_2) + v_k(m_1, m_2) D_h^1 u_i(m_1, m_2) \quad i, k \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

ist vor allem der Faktor $u_i(m_1 + 1, m_2)$, der sich auf einen zu mh benachbarten Gitterpunkt bezieht, eine Herausforderung, durch die das Zusammenfassen aller Ausdrücke im Matrizenprodukt erheblich erschwert wird.

Um eine Funktion $u(m)$ für das System in Satz 3.2.1 konstruieren zu können, wird ein spezieller Ansatz gewählt, der auf der Definition der diskreten Sinus- und Cosinusfunktion im Lemma 2.6.2 beruht:

Lemma 3.2.2 *Eine nichttriviale Lösung des Problems*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_1 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_2 u_1(m_1, m_2 + 1) & -a_2 u_0(m_1, m_2 + 1) - a_1 u_1(m_1, m_2 + 1) \\ a_2 u_0(m_1 + 1, m_2) + a_1 u_1(m_1 + 1, m_2) & a_1 u_0(m_1 + 1, m_2) - a_2 u_1(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} u_0(m_1, m_2) &= \frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ u_1(m_1, m_2) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2}, \end{aligned}$$

der die Unbekannten α , β , γ und δ mit $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ und $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ enthält.

Beweis: Das erste Matrixelement kann auf Grund der Differenzenableitungen in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}D_h^{-1}u_0(m_1+1, m_2+1) - \frac{1}{2}D_h^2u_1(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{2}h^{-1} \left[\frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} - \frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} - \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \\
&\quad + \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} + \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \right] \\
&= \frac{1}{2}h^{-1} \left[\frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1}(\alpha - \mathbf{i}\beta - 1) + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1}(\alpha + \mathbf{i}\beta - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \left(\frac{\gamma - \mathbf{i}\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - 1 \right) - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} \left(\frac{\gamma + \mathbf{i}\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}u_0(m_1, m_2+1) \left(\frac{\alpha - 1}{h} - \frac{\delta}{h(\gamma^2 + \delta^2)} \right) + \frac{1}{2}u_1(m_1, m_2+1) \left(\frac{\beta - 1}{h} + \frac{\gamma}{h(\gamma^2 + \delta^2)} \right).
\end{aligned}$$

Folglich müssen die freien Parameter α , β , γ , und δ die Gleichungen

$$2ha_1 = \alpha - 1 - \frac{\delta}{(\gamma^2 + \delta^2)} \quad \text{und} \quad -2ha_2 = \beta - 1 + \frac{\gamma}{(\gamma^2 + \delta^2)} \quad (3.6)$$

erfüllen. Für das zweite Matrixelement erhält man

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}D_h^{-1}u_1(m_1+1, m_2+1) - \frac{1}{2}D_h^2u_0(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{2}u_0(m_1, m_2+1) \left(\frac{\gamma}{h(\gamma^2 + \delta^2)} + \frac{\beta - 1}{h} \right) + \frac{1}{2}u_1(m_1, m_2+1) \left(\frac{1 - \alpha}{h} + \frac{\delta}{h(\gamma^2 + \delta^2)} \right),
\end{aligned}$$

so dass α , β , γ , und δ die gleichen Bedingungen wie oben zu erfüllen haben. Betrachtet wird nun das dritte Matrixelement. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}D_h^{-2}u_0(m_1+1, m_2+1) + \frac{1}{2}D_h^1u_1(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{2}u_0(m_1+1, m_2) \left(\frac{\gamma - 1}{h} - \frac{\beta}{h(\alpha^2 + \beta^2)} \right) + \frac{1}{2}u_1(m_1+1, m_2) \left(\frac{-\alpha}{h(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{1 - \delta}{h} \right)
\end{aligned}$$

leitet sich die Forderung

$$2ha_2 = \gamma - 1 - \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)} \quad \text{und} \quad -2ha_1 = \delta - 1 + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (3.7)$$

ab. Schließlich erhält man für das letzte Matrixelement

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}D_h^{-2}u_1(m_1+1, m_2+1) + \frac{1}{2}D_h^1u_0(m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{2}u_1(m_1+1, m_2) \left(\frac{1 - \gamma}{h} + \frac{\beta}{h(\alpha^2 + \beta^2)} \right) + \frac{1}{2}u_0(m_1+1, m_2) \left(\frac{-\alpha}{h(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{1 - \delta}{h} \right),
\end{aligned}$$

so dass sich auch hier die Gleichungen (3.7) ergeben ■

Mit den Beziehungen (3.6) und (3.7) sind vier Gleichungen für die vier freien Parameter α , β , γ , und δ in Lemma 3.2.2 aufgestellt. Gesucht wird nun nach einer Lösung für dieses Problems. Es erweist sich jedoch als einfacher und für die weiteren Betrachtungen als völlig ausreichend, die Ausdrücke $\alpha + \mathbf{i}\beta$, $\alpha - \mathbf{i}\beta$, $\gamma + \mathbf{i}\delta$, und $\gamma - \mathbf{i}\delta$ zu berechnen, da andererseits Gleichungen höherer Ordnung entstehen würden. In den folgenden zwei Lemmata wird eine Methode vorgestellt, mit der diese vier komplexen Ausdrücke berechnet werden können. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei

$$s_1 = 1 + 2a_1h, \quad s_2 = 1 + 2a_2h, \quad s_3 = 1 - 2a_2h \quad \text{und} \quad s_4 = 1 - 2a_1h.$$

Lemma 3.2.3 *Das System (3.6)-(3.7) kann in der Form*

$$\begin{aligned} \alpha + \mathbf{i}\beta &= s_1 - \mathbf{i} \frac{1}{\gamma - \mathbf{i}\delta} + \mathbf{i}s_3 & \alpha - \mathbf{i}\beta &= s_1 + \mathbf{i} \frac{1}{\gamma + \mathbf{i}\delta} - \mathbf{i}s_3 \\ \gamma - \mathbf{i}\delta &= s_2 + \mathbf{i} \frac{1}{\alpha + \mathbf{i}\beta} - \mathbf{i}s_4 & \gamma + \mathbf{i}\delta &= s_2 - \mathbf{i} \frac{1}{\alpha - \mathbf{i}\beta} + \mathbf{i}s_4 \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Beweis: Aus den Forderungen (3.6) und (3.7) und den angegebenen Substitutionen folgt zunächst

$$\alpha = s_1 + \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \quad \beta = s_3 - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} \quad \gamma = s_2 + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \delta = s_4 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Um die Behauptung des Lemmas zu beweisen, nutzt man diese vier Darstellungen, bildet die geforderten Ausdrücke auf der linken Seite und verwendet die Berechnungsvorschriften für komplexe Zahlen ■

Lemma 3.2.4 *Die Terme $\alpha + \mathbf{i}\beta$, $\alpha - \mathbf{i}\beta$, $\gamma + \mathbf{i}\delta$ und $\gamma - \mathbf{i}\delta$ sind Lösungen des Systems*

$$\begin{aligned} \left((\alpha + \mathbf{i}\beta) - \left[\frac{1}{s_4 + \mathbf{i}s_2} + \frac{s_1 + \mathbf{i}s_3}{2} \right] \right)^2 &= \frac{s_4^2 - s_2^2}{(s_4^2 + s_2^2)^2} + \frac{s_1^2 - s_3^2}{4} - \frac{2\mathbf{i}s_2s_4}{(s_4^2 + s_2^2)^2} + \frac{2\mathbf{i}s_1s_3}{4} \\ \left((\alpha - \mathbf{i}\beta) - \left[\frac{1}{s_4 - \mathbf{i}s_2} + \frac{s_1 - \mathbf{i}s_3}{2} \right] \right)^2 &= \frac{s_4^2 - s_2^2}{(s_4^2 + s_2^2)^2} + \frac{s_1^2 - s_3^2}{4} + \frac{2\mathbf{i}s_2s_4}{(s_4^2 + s_2^2)^2} - \frac{2\mathbf{i}s_1s_3}{4} \\ \left((\gamma + \mathbf{i}\delta) - \left[\frac{1}{s_3 + \mathbf{i}s_1} + \frac{s_2 + \mathbf{i}s_4}{2} \right] \right)^2 &= \frac{s_3^2 - s_1^2}{(s_3^2 + s_1^2)^2} + \frac{s_2^2 - s_4^2}{4} - \frac{2\mathbf{i}s_1s_3}{(s_3^2 + s_1^2)^2} + \frac{2\mathbf{i}s_2s_4}{4} \\ \left((\gamma - \mathbf{i}\delta) - \left[\frac{1}{s_3 - \mathbf{i}s_1} + \frac{s_2 - \mathbf{i}s_4}{2} \right] \right)^2 &= \frac{s_3^2 - s_1^2}{(s_3^2 + s_1^2)^2} + \frac{s_2^2 - s_4^2}{4} + \frac{2\mathbf{i}s_1s_3}{(s_3^2 + s_1^2)^2} - \frac{2\mathbf{i}s_2s_4}{4}. \end{aligned}$$

Beweis: Zunächst wird der Zusammenhang zwischen den Gleichungen in Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4 gezeigt, indem stellvertretend jeweils die erste Gleichung betrachtet wird. Aus Lemma 3.2.3 folgt

$$\begin{aligned}\alpha + \mathbf{i}\beta &= s_1 - \frac{\mathbf{i}}{\gamma - \mathbf{i}\delta} + \mathbf{i}s_3 = s_1 - \frac{\mathbf{i}}{s_2 + \frac{\mathbf{i}}{\alpha + \mathbf{i}\beta} - \mathbf{i}s_4} + \mathbf{i}s_3 \\ &= s_1 + \mathbf{i}s_3 + \frac{\alpha + \mathbf{i}\beta}{(s_4 + \mathbf{i}s_2)(\alpha + \mathbf{i}\beta) - 1}.\end{aligned}$$

Durch Umstellen dieser Gleichung erhält man

$$(\alpha + \mathbf{i}\beta)^2 - (\alpha + \mathbf{i}\beta)\left(\frac{2}{s_4 + \mathbf{i}s_2} + (s_1 + \mathbf{i}s_3)\right) + \frac{s_1 + \mathbf{i}s_3}{s_4 + \mathbf{i}s_2} = 0$$

und schließlich

$$\left((\alpha + \mathbf{i}\beta) - \left[\frac{1}{s_4 + \mathbf{i}s_2} + \frac{s_1 + \mathbf{i}s_3}{2}\right]\right)^2 = \frac{1}{(s_4 + \mathbf{i}s_2)^2} + \frac{(s_1 + \mathbf{i}s_3)^2}{4}.$$

Indem man von der rechten Seite dieser Gleichung den Real- und Imaginärteil berechnet, gelangt man unmittelbar zur ersten Gleichung von Lemma 3.2.4. Mit den übrigen Gleichungen verfährt man analog. Vermerkt sei, dass die rechten Seiten in den Gleichungen von Lemma 3.2.4 nur von der Schrittweite h und den Parametern a_1 und a_2 abhängen, welche durch Substitution in den Ausdrücken s_1, s_2, s_3 und s_4 verborgen sind. Im weiteren wird überprüft, ob sich die ersten beiden Gleichungen im Lemma 3.2.4 widersprechen, da sie sich beide auf die Parameter α und β beziehen. Auf gleiche Weise werden die letzten beiden Gleichungen untersucht. Zur Vereinfachung der Bezeichnung soll $u + \mathbf{i}v$ für die rechte Seite der ersten Gleichung geschrieben werden. Folglich hat die rechte Seite der zweiten Gleichung die Gestalt $u - \mathbf{i}v$. Nutzt man nun die trigonometrischen Formen $u + \mathbf{i}v = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi))$ und $u - \mathbf{i}v = r(\cos(-\varphi) + \mathbf{i}\sin(-\varphi))$ zur Berechnung der Wurzel, so erhält man für $k = 0$ und $k = 1$

$$\begin{aligned}\alpha + \mathbf{i}\beta &= \frac{s_4}{s_4^2 + s_2^2} + \frac{s_1}{2} + \sqrt{r} \cos \frac{\varphi + k\pi}{2} + \mathbf{i}\left(-\frac{s_2}{s_4^2 + s_2^2} + \frac{s_3}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{\varphi + k\pi}{2}\right) \\ \alpha - \mathbf{i}\beta &= \frac{s_4}{s_4^2 + s_2^2} + \frac{s_1}{2} + \sqrt{r} \cos \frac{-\varphi + k\pi}{2} + \mathbf{i}\left(\frac{s_2}{s_4^2 + s_2^2} - \frac{s_3}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{-\varphi + k\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Im Fall $k = 0$ sind beide Gleichungen widerspruchsfrei ■

Somit existiert eine Lösung $u(m)$ des Gleichungssystems in Satz 3.2.1 und wie bereits im Anschluß an diesen Satz angekündigt wird nun die folgende Matrizen-gleichung studiert:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \Phi_1(m_1, m_2) & \Phi_2(m_1, m_2) \\ \Phi_3(m_1, m_2) & \Phi_4(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Im Sinne des Ähnlichkeitsprinzips soll untersucht werden, ob die im Matrizenprodukt links stehende Matrix invertiert werden kann und ob diese Matrix mit der Exponentialfunktion im Zusammenhang steht.

Satz 3.2.2 *Wenn die Schrittweite h klein genug ist, so dass $1 + 4a_1a_2h^2 \neq 0$ gilt, dann kann jede Lösung des Problems (3.5) in der Form*

$$\begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{\det u(m_1, m_2)} \begin{pmatrix} u_0(m_1, m_2) & u_1(m_1+1, m_2+1) \\ -u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1+1, m_2+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(m_1, m_2) & \Phi_2(m_1, m_2) \\ \Phi_3(m_1, m_2) & \Phi_4(m_1, m_2) \end{pmatrix}$$

mit $\det u(m_1, m_2) = u_0(m_1, m_2)u_0(m_1+1, m_2+1) + u_1(m_1, m_2)u_1(m_1+1, m_2+1)$ geschrieben werden. Dabei werden die Matrixelemente $u_0(m)$ und $u_1(m)$ mit Hilfe von Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.4 berechnet und es gilt.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(m_1, m_2) & \Phi_2(m_1, m_2) \\ \Phi_3(m_1, m_2) & \Phi_4(m_1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 3.2.1, wenn man beweisen kann, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_0(m_1+1, m_2+1) & -u_1(m_1+1, m_2+1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Mit Hilfe des Ansatzes für u_0 und u_1 aus Lemma 3.2.2 hat die Determinante dieser Matrix die Gestalt

$$\begin{aligned} & u_0(m_1+1, m_2+1)u_0(m_1, m_2) + u_1(m_1+1, m_2+1)u_1(m_1, m_2) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{2m_1+1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{2m_2+1} + \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} + \frac{1}{4}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{2m_1+1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{2m_2+1} \\ &- \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{2m_1+1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{2m_2+1} + \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2+1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1+1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2+1} - \frac{1}{4}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{2m_1+1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{2m_2+1} \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2} \left(\frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)(\gamma + \mathbf{i}\delta) + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)(\gamma - \mathbf{i}\delta) \right). \end{aligned}$$

Da in Lemma 3.2.2 bereits $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ und $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ gefordert wurde, interessiert hier nur der Fall, in dem gilt $\frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)(\gamma + \mathbf{i}\delta) + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)(\gamma - \mathbf{i}\delta) = 0$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Das Ziel ist es nun, diese Bedingung als Bedingung

an die Koeffizienten a_1 und a_2 und die Schrittweite h zu formulieren. Mit Hilfe der Ausdrücke für α , β , γ und δ aus dem Beweis von Lemma 3.2.3 erhält man

$$\begin{aligned}\alpha\gamma &= s_1s_2 + s_1 \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + s_2 \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)} \quad \text{und} \\ \beta\delta &= s_3s_4 - s_3 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - s_4 \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\alpha\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}.\end{aligned}$$

Aus der Beziehung $\alpha\gamma = -\beta\delta$ folgt somit

$$s_1s_2 + s_3s_4 = \frac{s_3\alpha - s_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{s_4\gamma - s_2\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Mit Hilfe der Darstellungen

$$\begin{aligned}s_3\alpha - s_1\beta &= s_3\left(s_1 + \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) - s_1\left(s_3 - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}\right) = \frac{s_3\delta + s_1\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} \\ s_4\gamma - s_2\delta &= s_4\left(s_2 + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) - s_2\left(s_4 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \frac{s_4\beta + s_2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

gelangt man zu

$$s_1s_2 + s_3s_4 = \frac{s_3\delta + s_1\gamma + s_4\beta + s_2\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}.$$

Ferner gelten im Zähler des Ausdrucks auf der rechten Seite die Beziehungen

$$\begin{aligned}\delta s_3 + \gamma s_1 &= \delta\left(\beta + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}\right) + \gamma\left(\alpha - \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) = \beta\delta + \alpha\gamma = 0 \\ \beta s_4 + \alpha s_2 &= \beta\left(\delta + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right) + \alpha\left(\gamma - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \beta\delta + \alpha\gamma = 0,\end{aligned}$$

so dass die Determinante der Matrix nur Null wird, wenn $s_1s_2 + s_3s_4 = 0$ gilt. Diese Gleichung kann schließlich in der Form

$$0 = (1 + 2a_1h)(1 + 2a_2h) + (1 - 2a_2h)(1 - 2a_1h) = 2 + 8a_1a_2h^2$$

geschrieben werden ■

Vermerkt sei, dass die Matrixelemente $\Phi_1(m_1, m_2)$, $\Phi_2(m_1, m_2)$, $\Phi_3(m_1, m_2)$ und $\Phi_4(m_1, m_2)$ nicht unabhängig voneinander sind. Der Zusammenhang zwischen diesen Elementen wird unter Verwendung der Gleichung (3.8) beschrieben. Konkret gilt

$$\begin{aligned}&(\det u(m_1, m_2)) w_0(m_1, m_2) \\ &= u_0(m_1, m_2)\Phi_1(m_1, m_2) + u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_3(m_1, m_2) \\ &= -u_1(m_1, m_2)\Phi_2(m_1, m_2) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_4(m_1, m_2)\end{aligned}\tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned}
 & (\det u(m_1, m_2)) w_1(m_1, m_2) \\
 &= -u_1(m_1, m_2)\Phi_1(m_1, m_2) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_3(m_1, m_2) \quad (3.10) \\
 &= -u_0(m_1, m_2)\Phi_2(m_1, m_2) - u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_4(m_1, m_2).
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
 & \Phi_4(m_1, m_2) \\
 &= \frac{\det u(m_1, m_2)}{u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1)} \Phi_1(m_1, m_2) \\
 &+ \frac{u_1(m_1, m_2)u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - u_0(m_1, m_2)u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)}{u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1)} \Phi_2(m_1, m_2)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \Phi_3(m_1, m_2) \\
 &= \frac{1}{u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)} \left[-u_1(m_1, m_2)\Phi_2(m_1, m_2) - u_0(m_1, m_2)\Phi_1(m_1, m_2) \right. \\
 &+ u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) \left(\frac{\det u(m_1, m_2)}{u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1)} \Phi_1(m_1, m_2) \right. \\
 &\left. \left. + \frac{u_1(m_1, m_2)u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - u_0(m_1, m_2)u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)}{u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1)} \Phi_2(m_1, m_2) \right) \right],
 \end{aligned}$$

wenn gilt $u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1) \neq 0$ und $u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \neq 0$. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass diese beiden Eigenschaften erfüllt sind: Im Fall $u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1) = 0$ erhält man unter Verwendung des Ansatzes für u_0 und u_1 in Lemma 3.2.2 $(\alpha^2 + \beta^2)^{m_1+1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2+1} = 0$. Dies ist genau der Fall, der hier nicht betrachtet wird, da in Lemma 3.2.2 nach nichttrivialen Lösungen des Systems gesucht wird. Betrachtet wird nun die zweite Bedingung. Diese kann durch $u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) \neq 0$ ersetzt werden, wenn nach $\Phi_3(m_1, m_2)$ in Gleichung (3.10) anstelle von (3.9) aufgelöst wird. Eine dieser beiden Ausdrücke muss verschieden von Null sein, da sonst

$$0 = u_0^2(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_1^2(m_1 + 1, m_2 + 1) = (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1+1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2+1}$$

gilt. Dieser Fall wurde eben diskutiert.

Es sei jedoch auch noch auf einen anderen Zusammenhang zwischen den Elementen der Matrix Φ hingewiesen. Dazu wird die Gleichung $D^{1h}\Phi(m) = 0$ elementweise geschrieben:

$$D_h^{-1}\Phi_1 - D_h^2\Phi_3 = 0, \quad D_h^{-2}\Phi_1 + D_h^1\Phi_3 = 0, \quad D_h^{-1}\Phi_2 - D_h^2\Phi_4 = 0, \quad D_h^{-2}\Phi_2 + D_h^1\Phi_4 = 0.$$

Indem man in Analogie zu obigen Überlegungen Φ_2 und Φ_4 mit Hilfe von Φ_1 und Φ_3 ausdrückt, stellt sich die Frage, ob die letzten zwei Gleichungen automatisch erfüllt sind oder eine Zusatzbedingung darstellen. Erneut wird w_0 und w_1 in Gleichung (3.8) eliminiert. Man erhält

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= -\frac{u_0(m_1, m_2)}{u_1(m_1, m_2)} \Phi_1 - \frac{u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)}{u_1(m_1, m_2)} \Phi_3 + \frac{u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)}{u_1(m_1, m_2)} \Phi_4 \\ \Phi_4 &= \frac{u_1^2(m_1, m_2) + u_0^2(m_1, m_2)}{\det u(m_1, m_2)} \Phi_1 \\ &\quad + \frac{u_0(m_1, m_2)u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)u_1(m_1, m_2)}{\det u(m_1, m_2)} \Phi_3.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Ansatzes für u_0 und u_1 aus Lemma 3.2.2 beweist man in Analogie zum ersten Teil des Beweises von Satz 3.2.2

$$\begin{aligned}&u_0(m_1, m_2)u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)u_1(m_1, m_2) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}(\alpha\delta - \beta\gamma) \quad \text{sowie}\end{aligned}$$

$$\det u(m_1, m_2) = (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}(\alpha\gamma + \beta\delta)$$

$$u_1^2(m_1, m_2) + u_0^2(m_1, m_2) = (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1}(\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}$$

$$-u_0(m_1, m_2)(\alpha\gamma + \beta\delta) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) = -u_1(m_1, m_2)(\alpha\delta - \beta\gamma) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}&-u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)(\alpha\gamma + \beta\delta) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= -u_1(m_1, m_2)(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\Phi_4 = \frac{\Phi_1}{\alpha\gamma + \beta\delta} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta} \Phi_3$$

und

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{\Phi_1}{u_1(m_1, m_2)} \left(-u_0(m_1, m_2) + \frac{u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)}{\alpha\gamma + \beta\delta} \right) \\ &\quad + \frac{\Phi_3}{u_1(m_1, m_2)} \left(-u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta} \right) \right) \\ &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta} \Phi_1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}{\alpha\gamma + \beta\delta} \Phi_3.\end{aligned}$$

Für die beiden Gleichungen aus dem Matrizenproblem folgt im Fall $\alpha\gamma + \beta\delta \neq 0$

$$\begin{aligned}&D_h^{-1}[(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)\Phi_3] + D_h^2\Phi_1 + (\alpha\delta - \beta\gamma)[D_h^{-1}\Phi_1 + D_h^2\Phi_3] = 0 \quad \text{und} \\ &D_h^{-2}[-(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)\Phi_3] + D_h^1\Phi_1 + (\alpha\delta - \beta\gamma)[-D_h^{-2}\Phi_1 + D_h^1\Phi_3] = 0.\end{aligned}$$

Diese Differenzengleichungen sind als Zusatzbedingung für die 4 Komponenten Φ_1 bis Φ_4 zu verstehen. Im Vergleich dazu soll der Übergang zum kontinuierlichen Fall betrachtet werden. Da für $h \rightarrow 0$ das Matrixelement Φ_4 gegen Φ_1 und das Element Φ_2 gegen $-\Phi_3$ konvergiert, approximieren die Differenzengleichungen die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_3 + \frac{\partial}{\partial y}\Phi_1 = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{\partial}{\partial y}\Phi_3 + \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1 = 0,$$

so dass die Elemente Φ_1 und Φ_3 automatisch die Bedingungen für holomorphe Funktionen erfüllen und keine Zusatzbedingung erforderlich ist.

Beispiel: Im weiteren wird ein Beispiel präsentiert, um zu zeigen, wie die theoretischen Überlegungen bei den numerischen Berechnungen genutzt werden können. Es sei $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ sowie $h = 0.125$, $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Punkt $(m_1 h, m_2 h) = (0.125, 0.25)$ im Inneren eines beschränkten Gebietes G_h liegt und $D^{1h}\Phi(m) = 0$ für alle Gitterpunkte $m \in G_h$ gilt. Als Lösung der Gleichungen in Lemma 3.2.4 erhält man unter Verwendung eines Mapleprogrammes

$$\alpha = 1.264652496 \quad \beta = -0.4080319774 \quad \gamma = 1.518929861 \quad \delta = 0.0338222383.$$

Mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} u_0(m_1, m_2) &= \frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ u_1(m_1, m_2) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \end{aligned}$$

kann gezeigt werden, dass das Gleichungssystem in Lemma 3.2.2 erfüllt ist. Unter Verwendung von Satz 3.2.2 und den Beziehungen zwischen $\Phi_1(m_1, m_2)$, $\Phi_2(m_1, m_2)$, $\Phi_3(m_1, m_2)$ und $\Phi_4(m_1, m_2)$ erhält man

$$\begin{aligned} w_0(1, 2) &= 0.124437639 \Phi_1(1, 2) - 0.1029098652 \Phi_2(1, 2) \\ w_1(1, 2) &= -0.124437639 \Phi_2(1, 2) - 0.1029098653 \Phi_1(1, 2). \end{aligned}$$

Abschließend ist zu beweisen, dass eine Lösung des Systems (3.5) gefunden wurde. Dazu nutzt man die Eigenschaften

$$D_h^{-1}\Phi_1(1, 2) - D_h^2\Phi_3(1, 2) = 0, \quad D_h^{-1}\Phi_2(1, 2) - D_h^2\Phi_4(1, 2) = 0$$

und

$$D_h^{-2}\Phi_1(1, 2) + D_h^1\Phi_3(1, 2) = 0, \quad D_h^{-2}\Phi_2(1, 2) + D_h^1\Phi_4(1, 2) = 0$$

sowie die Beziehungen zwischen den vier Komponenten der Variablen Φ . In der folgenden Tabelle sind für alle vier Matrixelemente die auf der linken Seite des Gleichungssystems (3.5) berechneten Werte eingetragen.

$$\begin{aligned}
& -0.4332 \Phi_1(1, 2) - 0.2704 \Phi_2(1, 2) - 0.34E - 10 \Phi_2(1, 3) - 0.24E - 10 \Phi_1(1, 3) \\
& 0.2704 \Phi_1(1, 2) - 0.4332 \Phi_2(1, 2) - 0.60E - 10 \Phi_1(1, 3) + 0.33E - 10 \Phi_2(1, 3) \\
& -0.2704 \Phi_1(1, 2) + 0.4332 \Phi_2(1, 2) + 0.20E - 9 \Phi_2(2, 2) + 0.91E - 10 \Phi_1(2, 2) \\
& -0.4332 \Phi_1(1, 2) - 0.2704 \Phi_2(1, 2) - 0.12E - 9 \Phi_1(2, 2) + 0.26E - 9 \Phi_2(2, 2)
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite des Systems erhält man bei jedem Matrixelement exakt die ersten beiden Summanden der in der Tabelle eingetragenen Werte. Somit unterscheiden sich die Ergebnisse nur in der neunten Nachkommastelle.

Abschließend soll eine weitere Darstellungsform der Lösung $w(m)$ des Problems (3.5) präsentiert werden:

Ist die Schrittweite h klein genug, so folgt aus Satz 3.2.2

$$\begin{aligned}
w_0(m_1, m_2) &= \frac{u_0(m_1, m_2)\Phi_1(m_1, m_2) + u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_3(m_1, m_2)}{\det u(m_1, m_2)} \\
w_1(m_1, m_2) &= \frac{-u_1(m_1, m_2)\Phi_1(m_1, m_2) + u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)\Phi_3(m_1, m_2)}{\det u(m_1, m_2)}.
\end{aligned}$$

Indem man den Ansatz aus Lemma 3.2.2 sowie die Beziehung

$$\det u(m_1, m_2) = (\alpha^2 + \beta^2)^{m_1} (\gamma^2 + \delta^2)^{m_2} (\alpha\gamma + \beta\delta)$$

nutzt, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{u_0(m_1, m_2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{m_1} (\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - \mathbf{i}\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{m_1} \left(\frac{\gamma + \mathbf{i}\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right)^{m_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \mathbf{i}\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{m_1} \left(\frac{\gamma - \mathbf{i}\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right)^{m_2} \\
&= \frac{1}{2} (\alpha + \mathbf{i}\beta)^{-m_1} (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{-m_2} + \frac{1}{2} (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{-m_1} (\gamma + \mathbf{i}\delta)^{-m_2} \\
&= u_0(-m_1, -m_2).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(m_1 + 1, m_2 + 1)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{m_1} (\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}} &= -(\alpha\gamma + \beta\delta)u_1(-m_1, -m_2) + (\alpha\delta - \beta\gamma)u_0(-m_1, -m_2) \\
\frac{-u_1(m_1, m_2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{m_1} (\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}} &= u_1(-m_1, -m_2) \quad \text{und} \\
\frac{u_0(m_1 + 1, m_2 + 1)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{m_1} (\gamma^2 + \delta^2)^{m_2}} &= (\alpha\gamma + \beta\delta)u_0(-m_1, -m_2) + (\alpha\delta - \beta\gamma)u_1(-m_1, -m_2).
\end{aligned}$$

Auf diese Weise findet man die Darstellungen

$$\begin{aligned}
w_0(m_1, m_2) &= \frac{u_0(-m_1, -m_2)\Phi_1(m_1, m_2)}{\alpha\gamma + \beta\delta} - u_1(-m_1, -m_2)\Phi_3(m_1, m_2) \\
&\quad + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta} u_0(-m_1, -m_2)\Phi_3(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w_1(m_1, m_2) &= \frac{u_1(-m_1, -m_2)\Phi_1(m_1, m_2)}{\alpha\gamma + \beta\delta} + u_0(-m_1, -m_2)\Phi_3(m_1, m_2) \\ &\quad + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta} u_1(-m_1, -m_2)\Phi_3(m_1, m_2). \end{aligned}$$

Vermerkt sei, dass aus der Matrizengleichung (3.8) eine weitere Gleichung für w_0 und w_1 folgt. In diesen Fällen erhält man dieselben Darstellungsformeln für w_0 und w_1 , wenn man die Zusammenhänge zwischen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ_4 beachtet.

3.2.1.5 Konvergenz der diskreten Lösung im Fall $b_1 = b_2 = 0$

Im folgenden wird eine Schreibweise für $w(m)$ präsentiert, die es erlaubt, den Grenzübergang für $h \rightarrow 0$ auszuführen. Mit Hilfe des Ansatzes für u_0 und u_1 aus Lemma 3.2.2 erhält man

$$\begin{aligned} u_0(m_1, m_2) &= \frac{1}{2}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} + \frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} - (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) \cdot \frac{1}{2\mathbf{i}}\left((\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} + (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left((\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} + (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_1(m_1, m_2) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - \frac{1}{2\mathbf{i}}(\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1}(\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2} \\ &= -\frac{1}{2\mathbf{i}}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} - (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left((\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} + (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} + (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) \cdot \frac{1}{2\mathbf{i}}\left((\gamma + \mathbf{i}\delta)^{m_2} - (\gamma - \mathbf{i}\delta)^{m_2}\right). \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathbf{i}}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} - (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1}}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha}} - e^{-\mathbf{i}m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha}}\right) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sin\left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{1}{2}\left((\alpha + \mathbf{i}\beta)^{m_1} + (\alpha - \mathbf{i}\beta)^{m_1}\right) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \cos\left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

folgt

$$u_0(m_1, m_2) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2} \left(\sin\left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha}\right) \sin\left(m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha} \right) \cos \left(m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) \\
& = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2} \cos \left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha} - m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

und

$$u_1(m_1, m_2) = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2} \sin \left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha} - m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right).$$

Auf Grund von (3.8) hat die Lösung $w(m)$ des Systems (3.5) die Gestalt

$$\begin{aligned}
w_0(m_1, m_2) &= \frac{\cos \left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha} - m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) \Phi_1(m_1, m_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1+1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2+1} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)} \\
&\quad - \frac{\sin \left((m_1 + 1) \arctan \frac{\beta}{\alpha} - (m_2 + 1) \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) \Phi_3(m_1, m_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
w_1(m_1, m_2) &= \frac{\sin \left(m_1 \arctan \frac{\beta}{\alpha} - m_2 \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) \Phi_1(m_1, m_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1+1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2+1} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)} \\
&\quad + \frac{\cos \left((m_1 + 1) \arctan \frac{\beta}{\alpha} - (m_2 + 1) \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) \Phi_3(m_1, m_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^{m_1} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}^{m_2} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)}.
\end{aligned}$$

Nun kann der Grenzübergang für $h \rightarrow 0$ durchgeführt werden. Die nächsten Schritte werden anhand des Realteils $w_0(m)$ gezeigt.

Zunächst gilt mit $x_1 = m_1 h \approx (m_1 + 1)h$ und $x_2 = m_2 h \approx (m_2 + 1)h$

$$\begin{aligned}
w_0(x_1, x_2) &= \frac{\cos \left(x_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\beta}{\alpha}}{h} - x_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\delta}{\gamma}}{h} \right) \Phi_1(x_1, x_2)}{e^{x_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha^2 + \beta^2)}{2h}} e^{x_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma^2 + \delta^2)}{2h}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)} \\
&\quad - \frac{\sin \left(x_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\beta}{\alpha}}{h} - x_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\delta}{\gamma}}{h} \right) \Phi_3(x_1, x_2)}{e^{x_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha^2 + \beta^2)}{2h}} e^{x_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma^2 + \delta^2)}{2h}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right)},
\end{aligned}$$

so dass fünf einzelne Grenzwerte auf der rechten Seite zu untersuchen sind:

- $L1 = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(\arctan \frac{\beta}{\alpha} - \arctan \frac{\delta}{\gamma} \right) :$
Man nutzt die Darstellung für α und β am Ende des Beweises von Lemma 3.2.4 und die Eigenschaften $r = 0$ und $\varphi = 0$ für $h \rightarrow 0$ und erhält $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 1$, $\lim_{h \rightarrow 0} \beta = 0$ sowie $\lim_{h \rightarrow 0} \arctan \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Auf analoge Weise zeigt man $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma = 1$, $\lim_{h \rightarrow 0} \delta = 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \arctan \frac{\delta}{\gamma} = 0$. Somit gilt $L1 = 1$.
- $L2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\beta}{\alpha}}{h}$ und $L3 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\delta}{\gamma}}{h} :$
Mittels l'Hospitalscher Regel und den Eigenschaften $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 1$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \beta = 0$ folgt $L2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\beta}{dh}$. In Analogie erhält man $L3 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\delta}{dh}$.
- $L4 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha^2 + \beta^2)}{2h}$ und $L5 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma^2 + \delta^2)}{2h} :$
Unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel und den Eigenschaften für α und β ergibt sich $L4 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\alpha}{dh}$ und auf analoge Weise $L5 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\gamma}{dh}$.

Anhand der Gleichungen in Lemma 3.2.4 ist es möglich zu zeigen, dass die Grenzwerte $L2$ bis $L5$ existieren und endlich sind. Aus Lemma 3.2.3 folgert man

$$\begin{aligned}
 L4 + \mathbf{i} L2 &= 2a_1 + \mathbf{i} \frac{L5 - \mathbf{i} L3}{(\lim_{h \rightarrow 0} \gamma - \mathbf{i} \lim_{h \rightarrow 0} \delta)^2} - 2\mathbf{i}a_2, \\
 L4 - \mathbf{i} L2 &= 2a_1 - \mathbf{i} \frac{L5 + \mathbf{i} L3}{(\lim_{h \rightarrow 0} \gamma + \mathbf{i} \lim_{h \rightarrow 0} \delta)^2} + 2\mathbf{i}a_2, \\
 L5 - \mathbf{i} L3 &= 2a_2 - \mathbf{i} \frac{L4 + \mathbf{i} L2}{(\lim_{h \rightarrow 0} \alpha + \mathbf{i} \lim_{h \rightarrow 0} \beta)^2} + 2\mathbf{i}a_1 \quad \text{und} \\
 L5 + \mathbf{i} L3 &= 2a_2 + \mathbf{i} \frac{L4 - \mathbf{i} L2}{(\lim_{h \rightarrow 0} \alpha - \mathbf{i} \lim_{h \rightarrow 0} \beta)^2} - 2\mathbf{i}a_1.
 \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen resultieren die beiden Zusammenhänge $L5 = L2 + 2a_2$ und $L4 = L3 + 2a_1$, so dass zusammenfassend gilt

$$w_0(x_1, x_2) = \frac{\cos(x_1 L2 - x_2 L3) \Phi_1(x_1, x_2)}{e^{x_1 (L3+2a_1)} e^{x_2 (L2+2a_2)}} - \frac{\sin(x_1 L2 - x_2 L3) \Phi_3(x_1, x_2)}{e^{x_1 (L3+2a_1)} e^{x_2 (L2+2a_2)}}$$

und

$$w_1(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 L2 - x_2 L3) \Phi_1(x_1, x_2)}{e^{x_1 (L3+2a_1)} e^{x_2 (L2+2a_2)}} + \frac{\cos(x_1 L2 - x_2 L3) \Phi_3(x_1, x_2)}{e^{x_1 (L3+2a_1)} e^{x_2 (L2+2a_2)}}.$$

Schließlich bleibt zu zeigen, dass diese Grenzwerte Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Wenn die Beziehungen

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} = 0$$

erfüllt sind, so erhält man für den Realteil

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{L2}{2} w_1 - \frac{L4}{2} w_0 + \frac{L3}{2} w_0 + \frac{L5}{2} w_1 = a_2 w_1 - a_1 w_0$$

und für den Imaginärteil

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = \frac{L3}{2} w_1 - \frac{L5}{2} w_0 + \frac{L2}{2} w_0 - \frac{L4}{2} w_1 = -a_1 w_1 - a_2 w_0.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen offensichtlich den Real- und Imaginärteil des Produktes $(-a_1 - \mathbf{i}a_2)(w_0 + \mathbf{i}w_1)$ dar, so dass tatsächlich eine Lösung der homogenen Differentialgleichung gefunden wurde, bei der ein Faktor eine holomorphe Funktion ist.

Formel (3.2) zeigt, dass der zweite Faktor der Lösung $w(z)$ im kontinuierlichen Fall eine Exponentialfunktion ist. Kann man beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ auch den Zusammenhang zu dieser Exponentialfunktion herausarbeiten? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, werden die Grenzwerte für w_0 und w_1 mit dem klassischen Produkt

$$\begin{aligned} e^{-(a_1 + \mathbf{i}a_2)(x_1 - \mathbf{i}x_2)} (\Phi_1 + \mathbf{i}\Phi_3) &= e^{-a_1 x_1} e^{-a_2 x_2} e^{\mathbf{i}(a_1 x_2 - a_2 x_1)} (\Phi_1 + \mathbf{i}\Phi_3) \\ &= e^{-a_1 x_1} e^{-a_2 x_2} \left(\cos(a_1 x_2 - a_2 x_1) \Phi_1 - \sin(a_1 x_2 - a_2 x_1) \Phi_3 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i}(\sin(a_1 x_2 - a_2 x_1) \Phi_1 + \cos(a_1 x_2 - a_2 x_1) \Phi_3) \right) \end{aligned}$$

verglichen. Man erhält die Beziehung

$$(w_0(x_1, x_2) + \mathbf{i}w_1(x_1, x_2)) = e^{-x_1(L3+2a_1)} e^{-x_2(L2+2a_2)} e^{\mathbf{i}(x_1 L2 - x_2 L3)} (\Phi_1 + \mathbf{i}\Phi_3).$$

Mit Hilfe der Substitution $L3 = L4 - 2a_1$ und $L2 = L5 - 2a_2$ ist folgende Umformung möglich:

$$\begin{aligned} &e^{-x_1(L3+2a_1)} e^{-x_2(L2+2a_2)} e^{\mathbf{i}(x_1 L2 - x_2 L3)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(-L3 + \mathbf{i}L2)(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{\frac{1}{2}(-L4 + 2a_1 + \mathbf{i}(L5 - 2a_2))(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{-2x_1 a_1} e^{-2x_2 a_2} \\ &= e^{\frac{1}{2}(-L3 + \mathbf{i}L2)(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{\frac{1}{2}(-L4 + \mathbf{i}L5)(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{(a_1 - \mathbf{i}a_2)(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{-2x_1 a_1} e^{-2x_2 a_2} \\ &= e^{\frac{1}{2}(-L3 - L4 + \mathbf{i}(L2 + L5))(x_1 + \mathbf{i}x_2)} e^{-(a_1 + \mathbf{i}a_2)(x_1 - \mathbf{i}x_2)}. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass der erste Faktor auf der rechten Seite holomorph ist. Da im kontinuierlichen Fall das Produkt zweier holomorpher Funktionen wieder holomorph ist, erhält man eine holomorphe Funktion mit Hilfe der Substitution

$$\Phi_1^* + \mathbf{i}\Phi_3^* = e^{\frac{1}{2}(-L3 - L4 + \mathbf{i}(L2 + L5))(x_1 + \mathbf{i}x_2)} (\Phi_1 + \mathbf{i}\Phi_3).$$

Somit ist die klassische Exponentialfunktion bis auf den angegebenen holomorphen Faktor approximiert.

Im folgenden werden homogene diskrete Vekugleichungen mit $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ betrachtet. Dabei ist es ausreichend, den Spezialfall $a_1 = a_2 = 0$ zu untersuchen, da das Gleichungssystem (3.4) linear ist und eine Lösung des Problems durch Überlagerung der Lösungen aus den Fällen $a_1 = a_2 = 0$ und $b_1 = b_2 = 0$ konstruiert werden kann.

3.2.1.6 Homogene diskrete Gleichungen im Fall $a_1 = a_2 = 0$

In Analogie zum Gleichungssystem (3.5) wird ein System von vier Gleichungen betrachtet, das die Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & w_1(m_1, m_2) \\ -w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

hat. Auch hier approximieren beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ die Gleichungen, die zum ersten und vierten Matrixelement gehören, dieselbe Differentialgleichung. Dieser Sachverhalt spiegelt sich auch bei den Gleichungen wieder, die zum zweiten und dritten Matrixelement gehören.

Im Vergleich zum System (3.5) wird nun ein System untersucht, bei dem auf der rechten Seite die Matrix für $w(m)$ eine andere Struktur hat. Das Ziel ist es, dieses Problem auf die Situation im Satz 3.2.1 zu übertragen, denn auch hier steht eine Produktdarstellung der Lösung im Mittelpunkt, bei der ein Faktor eine diskret holomorphe Funktion ist. Mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & w_1(m_1, m_2) \\ -w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man in jedem Gitterpunkt $m \in G_h$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \\ -w_1 & w_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{w_0^2 + w_1^2} \begin{pmatrix} -b_1(w_0^2 - w_1^2) - 2b_2w_0w_1 & -2b_1w_0w_1 + b_2(w_0^2 - w_1^2) \\ -b_2(w_0^2 - w_1^2) + 2b_1w_0w_1 & -2b_2w_0w_1 - b_1(w_0^2 - w_1^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Schreibweise kann der folgende Satz in Analogie zum Satz 3.2.1 bewiesen werden:

Satz 3.2.3 *Es sei $w(m)$ eine beliebige Lösung des Problems (3.11) und $u(m)$ eine Lösung des Systems*

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{w_0^2 + w_1^2} \left((b_1(w_0^2 - w_1^2) + 2b_2w_0w_1) u_0(m_1, m_2 + 1) \right. \\
&\quad \left. + (2b_1w_0w_1 - b_2(w_0^2 - w_1^2)) u_1(m_1, m_2 + 1) \right) \\
U_2 &= \frac{1}{w_0^2 + w_1^2} \left((2b_1w_0w_1 - b_2(w_0^2 - w_1^2)) u_0(m_1, m_2 + 1) \right. \\
&\quad \left. + (-b_1(w_0^2 - w_1^2) - 2b_2w_0w_1) u_1(m_1, m_2 + 1) \right) \\
U_3 &= \frac{1}{w_0^2 + w_1^2} \left((b_2(w_0^2 - w_1^2) - 2b_1w_0w_1) u_0(m_1 + 1, m_2) \right. \\
&\quad \left. + (2b_2w_0w_1 + b_1(w_0^2 - w_1^2)) u_1(m_1 + 1, m_2) \right) \quad \text{und} \\
U_4 &= \frac{1}{w_0^2 + w_1^2} \left((2b_2w_0w_1 + b_1(w_0^2 - w_1^2)) u_0(m_1 + 1, m_2) \right. \\
&\quad \left. + (-b_2(w_0^2 - w_1^2) + 2b_1w_0w_1) u_1(m_1 + 1, m_2) \right).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & -u_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ u_1(m_1, m_2) & u_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(m_1, m_2) & -w_1(m_1, m_2) \\ w_1(m_1, m_2) & w_0(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.2.1.7 Inhomogene Vekugleichungen

Ausgehend vom Problem (3.5) wird hier das inhomogene Problem

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & -\tilde{f}_1 \\ f_1 & \tilde{f}_0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

betrachtet. Für $h \rightarrow 0$ wird gefordert, dass \tilde{f}_0 gegen f_0 und \tilde{f}_1 gegen f_1 konvergiert. Somit approximiert man mit dem System (3.12) die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} w_0 - \frac{\partial}{\partial y} w_1 \right) + a_1 w_0 - a_2 w_1 = f_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} w_0 + \frac{\partial}{\partial x} w_1 \right) + a_2 w_0 + a_1 w_1 = f_1.$$

Im folgenden wird die Lösung des inhomogenen Problems (3.12) mit Hilfe des zum Operator D^{1h} rechtsinversen Operators $T^{1h} = (T_{h1}^1, T_{h2}^1)^T$ beschrieben, der am

Ende des Abschnittes 2.3.2 definiert wurde. Man erhält eine Lösung des inhomogenen Problems (3.12) innerhalb des Gebietes G_h durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0^{hom} & -w_1^{hom} \\ w_1^{hom} & w_0^{hom} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} T_{h1}^1[f_0, f_1] & T_{h1}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] \\ T_{h2}^1[f_0, f_1] & T_{h2}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} w_0^{hom} & -w_1^{hom} \\ w_1^{hom} & w_0^{hom} \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Problems (3.12) ist. Da sowohl für w_0 als auch für w_1 zwei Gleichungen zu erfüllen sind, erscheint es sinnvoll für alle $m \in G_h$ zu fordern

$$T_{h1}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] = -T_{h2}^1[f_0, f_1] \quad \text{und} \quad T_{h2}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] = T_{h1}^1[f_0, f_1].$$

Aus diesen Gleichungen leiten sich die folgenden Bedingungen ab:

$$\begin{pmatrix} -\tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{h1}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] \\ T_{h2}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T_{h2}^1[f_0, f_1] \chi_{G_h} \\ T_{h1}^1[f_0, f_1] \chi_{G_h} \end{pmatrix}.$$

Diese Bedingungen ermöglichen es, \tilde{f}_0 und \tilde{f}_1 bei Vorgabe beliebiger Funktionen f_0 und f_1 zu berechnen. Abschließend wird gezeigt, dass für $h \rightarrow 0$ sowohl \tilde{f}_0 gegen f_0 als auch \tilde{f}_1 gegen f_1 konvergiert. Dazu wird die Konvergenzbeziehung

$$E_h^1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{21}^1 & E_{22}^1 \\ -E_{11}^1 & -E_{12}^1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \begin{pmatrix} F(\xi_1/|\xi|^2) & F(\xi_2/|\xi|^2) \\ -F(\xi_2/|\xi|^2) & F(\xi_1/|\xi|^2) \end{pmatrix}$$

genutzt sowie die Eigenschaften

$$-\int_{y \in G} \begin{pmatrix} E_{21}^1(x-y) \\ E_{22}^1(x-y) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} dG = \int_{y \in G} \begin{pmatrix} E_{12}^1(x-y) \\ E_{11}^1(x-y) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ -f_1 \end{pmatrix} dG$$

und

$$\int_{y \in G} \begin{pmatrix} E_{11}^1(x-y) \\ E_{12}^1(x-y) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} dG = \int_{y \in G} \begin{pmatrix} E_{22}^1(x-y) \\ E_{21}^1(x-y) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ -f_1 \end{pmatrix} dG.$$

Über den Bezug zum Kontinuierlichen erkennt man $T_{h1}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] = -T_{h2}^1[f_0, f_1] \rightarrow T_{h1}^1[-f_1, f_0]$ und $T_{h2}^1[-\tilde{f}_1, \tilde{f}_0] = T_{h1}^1[f_0, f_1] \rightarrow T_{h2}^1[-f_1, f_0]$. Schließlich wendet man den Operator D^{1h} an und nutzt die Eigenschaft $D^{1h}(T^{1h}f)(m) = f(m)$ für alle $m \in G_h$.

Die Resultate in den Abschnitten 3.2.1.3 bis 3.2.1.7 sind erste wichtige Schritte, um neben der klassischen Theorie der Vekua-Gleichungen eine diskrete Theorie aufbauen zu können. Eine Erweiterungsmöglichkeit dieser Theorie ist insbesondere in der Frage zu sehen, welche Systeme von Differenzengleichungen auf diskrete Vekua-Gleichungen transformiert werden können. Das letzte Problem steht im engen Zusammenhang mit der Untersuchung diskreter Beltramigleichungen, die im Abschnitt 3.2.2 betrachtet werden.

In vielen dieser Abschnitte wurde immer wieder die Matrixdarstellung genutzt, so dass kein Kommutativgesetz angewendet werden kann. Da diese Herangehensweise der Situation im quaternionischen Fall entspricht, ist es naheliegend, eine Verallgemeinerung der diskreten Theorie der Vekugleichungen auf den quaternionischen Fall zu versuchen. Dazu soll die homogene Gleichung betrachtet werden. Demonstriert wird, dass die Lösung dieser Gleichung sich wieder als ein Produkt zweier Funktionen schreiben lässt. Hier stößt man neben der bereits angesprochenen Schwierigkeit mit der diskreten Produktformel auf das Problem, dass die Ausdrücke wesentlich umfangreicher und unübersichtlicher werden. Dennoch ist eine Faktorisierung der Lösung möglich, so dass man auch hier auf dem Ähnlichkeitsprinzip aufbauen kann.

3.2.1.8 Vekugleichungen im quaternionischen Fall

Es sei \mathbb{R}^4 der 4-dimensionale Euklidische Vektorraum mit der Orthonormalbasis $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 0, 1)$. Auf Grund der Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0, & e_i^2 &= -e_0, & i &= 1, 2, 3 \\ e_i e_j + e_j e_i &= 0, & i &\neq j, & i, j &= 1, 2, 3 \\ e_0 e_i &= e_i e_0 = e_i, & i &= 0, 1, 2, 3 \\ e_1 e_2 &= e_3, & e_2 e_3 &= e_1 & \text{und} & e_3 e_1 = e_2 \end{aligned}$$

ist die Algebra der Quaternionen $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ nichtkommutativ. Quaternionen kann man identifizieren mit einer speziellen Art von reellen 4×4 -Matrizen der Form

$$a = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Mehr Einzelheiten dazu findet man in [GS2]. Im folgenden wird eine dem Satz 3.2.1 angepaßte Aussage für den quaternionischen Fall bewiesen. Zur Vereinfachung wird nur der Fall $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ betrachtet und zunächst erst einmal der Dirac-Operator studiert. Bei den weiteren Ausführungen ist genau darauf zu achten, in welchem Gitterpunkt des Raumes \mathbb{R}^3 die Funktionen untersucht werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird ohne Index der Gitterpunkt (m_1, m_2, m_3) bezeichnet. Die verwendeten benachbarten Gitterpunkte werden durch die in der Tabelle 1 festgelegten Indizes symbolisiert.

Index	Gitterpunkt
[1]	$(m_1, m_2 + 1, m_3 + 1)$
[2]	$(m_1 + 1, m_2, m_3 + 1)$
[3]	$(m_1 + 1, m_2 + 1, m_3)$
[4]	$(m_1 + 1, m_2 + 1, m_3 + 1)$
[5]	$(m_1 + 1, m_2, m_3)$
[6]	$(m_1, m_2 + 1, m_3)$
[7]	$(m_1, m_2, m_3 + 1)$

Tabelle 1

Satz 3.2.4 *Es sei $(w_0, w_1, w_2, w_3)^T$ eine beliebige Lösung des Problems*

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & -D_h^1 & -D_h^2 & -D_h^3 \\ D_h^1 & 0 & -D_h^{-3} & D_h^{-2} \\ D_h^2 & D_h^{-3} & 0 & -D_h^{-1} \\ D_h^3 & -D_h^{-2} & D_h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und $(u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & -D_h^1 & -D_h^2 & -D_h^3 \\ D_h^1 & 0 & -D_h^{-3} & D_h^{-2} \\ D_h^2 & D_h^{-3} & 0 & -D_h^{-1} \\ D_h^3 & -D_h^{-2} & D_h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1^{[1]} & u_0^{[1]} & -u_3^{[1]} & u_2^{[1]} \\ -u_2^{[2]} & u_3^{[2]} & u_0^{[2]} & -u_1^{[2]} \\ -u_3^{[3]} & -u_2^{[3]} & u_1^{[3]} & u_0^{[3]} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit den Matrixelementen

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_0 u_0^{[4]} + a_1 u_1^{[4]} + a_2 u_2^{[4]} + a_3 u_3^{[4]} & A_{21} &= a_1 u_0^{[5]} - a_0 u_1^{[5]} + a_3 u_2^{[5]} - a_2 u_3^{[5]} \\
A_{12} &= -a_1 u_0^{[4]} + a_0 u_1^{[4]} + a_3 u_2^{[4]} - a_2 u_3^{[4]} & A_{22} &= a_0 u_0^{[5]} + a_1 u_1^{[5]} - a_2 u_2^{[5]} - a_3 u_3^{[5]} \\
A_{13} &= -a_2 u_0^{[4]} - a_3 u_1^{[4]} + a_0 u_2^{[4]} + a_1 u_3^{[4]} & A_{23} &= -a_3 u_0^{[5]} + a_2 u_1^{[5]} + a_1 u_2^{[5]} - a_0 u_3^{[5]} \\
A_{14} &= -a_3 u_0^{[4]} + a_2 u_1^{[4]} - a_1 u_2^{[4]} + a_0 u_3^{[4]} & A_{24} &= a_2 u_0^{[5]} + a_3 u_1^{[5]} + a_0 u_2^{[5]} + a_1 u_3^{[5]} \\
A_{31} &= a_2 u_0^{[6]} - a_3 u_1^{[6]} - a_0 u_2^{[6]} + a_1 u_3^{[6]} & A_{41} &= a_3 u_0^{[7]} + a_2 u_1^{[7]} - a_1 u_2^{[7]} - a_0 u_3^{[7]} \\
A_{32} &= a_3 u_0^{[6]} + a_2 u_1^{[6]} + a_1 u_2^{[6]} + a_0 u_3^{[6]} & A_{42} &= -a_2 u_0^{[7]} + a_3 u_1^{[7]} - a_0 u_2^{[7]} + a_1 u_3^{[7]} \\
A_{33} &= a_0 u_0^{[6]} - a_1 u_1^{[6]} + a_2 u_2^{[6]} - a_3 u_3^{[6]} & A_{43} &= a_1 u_0^{[7]} + a_0 u_1^{[7]} + a_3 u_2^{[7]} + a_2 u_3^{[7]} \\
A_{34} &= -a_1 u_0^{[6]} - a_0 u_1^{[6]} + a_3 u_2^{[6]} + a_2 u_3^{[6]} & A_{44} &= a_0 u_0^{[7]} - a_1 u_1^{[7]} - a_2 u_2^{[7]} + a_3 u_3^{[7]}.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -D_h^1 & -D_h^2 & -D_h^3 \\ D_h^1 & 0 & -D_h^{-3} & D_h^{-2} \\ D_h^2 & D_h^{-3} & 0 & -D_h^{-1} \\ D_h^3 & -D_h^{-2} & D_h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1^{[1]} & u_0^{[1]} & -u_3^{[1]} & u_2^{[1]} \\ -u_2^{[2]} & u_3^{[2]} & u_0^{[2]} & -u_1^{[2]} \\ -u_3^{[3]} & -u_2^{[3]} & u_1^{[3]} & u_0^{[3]} \end{pmatrix} \right. \\ \left. \cdot \begin{pmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die folgenden Schritte sind völlig analog zum Beweis von Satz 3.2.1. Betrachtet wird hier nur das erste Matrixelement auf der linken Seite. Für alle weiteren Matrixelemente sind die Berechnungen zu wiederholen. In Bezug auf dieses erste Element sind die Summanden

$$\begin{aligned} S_1 &= -D_h^1[-u_1^{[1]}w_0 + u_0^{[1]}w_1 - u_3^{[1]}w_2 + u_2^{[1]}w_3] \\ &= \frac{1}{h}[-u_1^{[1]}w_0 + u_0^{[1]}w_1 - u_3^{[1]}w_2 + u_2^{[1]}w_3 + u_1^{[4]}w_0^{[5]} - u_0^{[4]}w_1^{[5]} + u_3^{[4]}w_2^{[5]} - u_2^{[4]}w_3^{[5]} \\ &\quad - u_1^{[4]}w_0 + u_0^{[4]}w_1 - u_3^{[4]}w_2 + u_2^{[4]}w_3 + u_1^{[4]}w_0 - u_0^{[4]}w_1 + u_3^{[4]}w_2 - u_2^{[4]}w_3] \\ &= u_1^{[4]}(D_h^1w_0) + u_0^{[4]}(-D_h^1w_1) + u_3^{[4]}(D_h^1w_2) + u_2^{[4]}(-D_h^1w_3) \\ &\quad + w_0(D_h^1u_1^{[1]}) + w_1(-D_h^1u_0^{[1]}) + w_2(D_h^1u_3^{[1]}) + w_3(-D_h^1u_2^{[1]}), \\ S_2 &= -D_h^2[-u_2^{[2]}w_0 + u_3^{[2]}w_1 + u_0^{[2]}w_2 - u_1^{[2]}w_3] \\ &= u_2^{[4]}(D_h^2w_0) + u_3^{[4]}(-D_h^2w_1) + u_0^{[4]}(-D_h^2w_2) + u_1^{[4]}(D_h^2w_3) \\ &\quad + w_0(D_h^2u_2^{[2]}) + w_1(-D_h^2u_3^{[2]}) + w_2(-D_h^2u_0^{[2]}) + w_3(D_h^2u_1^{[2]}) \quad \text{und} \\ S_3 &= -D_h^3[-u_3^{[3]}w_0 - u_2^{[3]}w_1 + u_1^{[3]}w_2 + u_0^{[3]}w_3] \\ &= u_3^{[4]}(D_h^3w_0) + u_2^{[4]}(D_h^3w_1) + u_1^{[4]}(-D_h^3w_2) + u_0^{[4]}(-D_h^3w_3) \\ &\quad + w_0(D_h^3u_3^{[3]}) + w_1(D_h^3u_2^{[3]}) + w_2(-D_h^3u_1^{[3]}) + w_3(-D_h^3u_0^{[3]}) \end{aligned}$$

zu addieren. Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} &S_1 + S_2 + S_3 \\ &= u_0^{[4]}(-D_h^1w_1 - D_h^2w_2 - D_h^3w_3) + u_1^{[4]}(D_h^1w_0 + D_h^2w_3 - D_h^3w_2) \\ &\quad + u_2^{[4]}(-D_h^1w_3 + D_h^2w_0 + D_h^3w_1) + u_3^{[4]}(D_h^1w_2 - D_h^2w_1 + D_h^3w_0) \\ &\quad + w_0(D_h^1u_1^{[1]} + D_h^2u_2^{[2]} + D_h^3u_3^{[3]}) + w_1(-D_h^1u_0^{[1]} - D_h^2u_3^{[2]} + D_h^3u_2^{[3]}) \\ &\quad + w_2(D_h^1u_3^{[1]} - D_h^2u_0^{[2]} - D_h^3u_1^{[3]}) + w_3(-D_h^1u_2^{[1]} + D_h^2u_1^{[2]} - D_h^3u_0^{[3]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_0^{[4]}(-a_0w_0 + a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3) + u_1^{[4]}(-a_0w_1 - a_1w_0 - a_2w_3 + a_3w_2) \\
&\quad + u_2^{[4]}(-a_0w_2 + a_1w_3 - a_2w_0 - a_3w_1) + u_3^{[4]}(-a_0w_3 - a_1w_2 + a_2w_1 - a_3w_0) \\
&\quad + w_0(a_0u_0^{[4]} + a_1u_1^{[4]} + a_2u_2^{[4]} + a_3u_3^{[4]}) + w_1(-a_1u_0^{[4]} + a_0u_1^{[4]} + a_3u_2^{[4]} - a_2u_3^{[4]}) \\
&\quad + w_2(-a_2u_0^{[4]} - a_3u_1^{[4]} + a_0u_2^{[4]} + a_1u_3^{[4]}) + w_3(-a_3u_0^{[4]} + a_2u_1^{[4]} - a_1u_2^{[4]} + a_0u_3^{[4]}) \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Damit gelingt ein erster Schritt in Richtung Ausbau der diskreten Theorie. Im Sinne des Ähnlichkeitsprinzips stellt sich nun die Frage, ob nicht einer der Faktoren mit der Exponentialfunktion zusammenhängt. An diese Überlegung schließt sich unmittelbar die Frage an, wie denn in der Algebra der Quaternionen eine Exponentialfunktion aussehen kann und welche speziellen Eigenschaften diese haben sollte. Als Ausblick auf den weiteren Ausbau der diskreten Theorie wird dieser Frage im Kapitel 4 sehr ausführlich nachgegangen, allerdings zunächst in der klassischen Theorie, um eine geeignete Grundlage für die Diskretisierung zu schaffen.

3.2.2 Diskrete Beltramigleichungen

Vekua-Gleichungen besitzen besonders deshalb eine große Bedeutung, weil im ebenen Fall elliptische Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation in ein 2×2 -System von Gleichungen erster Ordnung überführt werden können. Beschreibt man diese Systeme mit Methoden der komplexen Analysis, so erhält man Vekua-(ähnliche) Gleichungen. Unter Verwendung der Koordinatentransformation kann in der klassischen Theorie gezeigt werden, dass die Beltramigleichung erfüllt ist. Die Lösung dieser Gleichung läßt sich mit Hilfe des Π -Operators beschreiben. Im Sinne einer diskreten Theorie stellt sich zunächst erst einmal die Frage, ob dies auf einem gleichmäßigen Gitter der Schrittweite h überhaupt funktionieren kann. Dabei geht es nicht nur um die Approximation der klassischen Operatoren, sondern gleichzeitig darum, dass die diskreten Operatoren die grundlegenden Eigenschaften besitzen. Insbesondere ist auch die Frage zu klären, ob man mit Hilfe der Differenzenoperatoren aus dem Kapitel 2 einen diskreten Π -Operator definieren kann, der zur Lösung einer entsprechenden Beltramigleichung führt. Erste Ergebnisse zur Diskretisierung des Π -Operators und zur diskreten Beltramigleichung wurden bereits in der Arbeit [GH8] veröffentlicht.

Im kontinuierlichen Fall können Gleichungen der Gestalt $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = f$ mit Hilfe der Transformation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_0}{\partial x} &= \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \\
\frac{\partial \omega_0}{\partial y} &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

mit $\Delta = ac - b^2 > 0$ in die Form $u_{\omega_0, \omega_0} + u_{\omega_1, \omega_1} = \tilde{f}$ überführt werden. Auf Grund der Faktorisierung des Laplaceoperators erfüllt jede Lösung des Problems

$$\begin{pmatrix} u_{\omega_0} - v_{\omega_1} \\ u_{\omega_1} + v_{\omega_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^2[\tilde{f}, g] \\ T_2^2[\tilde{f}, g] \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

obige Poissongleichung, wenn $\tilde{T}^2 = \begin{pmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \end{pmatrix}$ der zum Operator $\tilde{D}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_0} & \frac{\partial}{\partial \omega_1} \\ -\frac{\partial}{\partial \omega_1} & \frac{\partial}{\partial \omega_0} \end{pmatrix}$ rechtsinverse Operator ist. Dies beweist man durch Anwendung des Operators \tilde{D}^2 auf die Gleichung (3.13). Schreibt man zusätzlich die Gleichung (3.13) komponentenweise, dann erhält man ein System von Gleichungen erster Ordnung. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass man mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} u_{\omega_0} - v_{\omega_1} \\ u_{\omega_1} + v_{\omega_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

eine Lösung des Problems $u_{\omega_0 \omega_0} + u_{\omega_1 \omega_1} = (a^2 + b^2)u$ erhält, da aus

$$u_{\omega_0 \omega_0} - v_{\omega_1 \omega_0} = a u_{\omega_0} + b v_{\omega_0} \quad \text{und} \quad u_{\omega_1 \omega_1} + v_{\omega_0 \omega_1} = b u_{\omega_1} - a v_{\omega_1}$$

in der Summe

$$u_{\omega_0 \omega_0} + u_{\omega_1 \omega_1} = a(u_{\omega_0} - v_{\omega_1}) + b(u_{\omega_1} + v_{\omega_0}) = a(au + bv) + b(bu - av)$$

resultiert. Durch diesen Ansatz, der ein System von Gleichungen erster Ordnung verkörpert, wird der Zusammenhang zu Vekugleichungen besonders deutlich.

Die Idee der Transformation soll nun auf den diskreten Fall übertragen werden. Zunächst gilt

$$u_{m_1} = D_h^1 u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) = u_{\omega_0} \cdot D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_1} \cdot D_h^1 \omega_1$$

mit

$$\begin{aligned} u_{\omega_0} &= \frac{u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\ u_{\omega_1} &= \frac{u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)}. \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit der Approximation erhält man, wenn man als Ausgangspunkt die Differenzenableitung $u_{m_2} = D_h^2 u(\omega_0(m_1, m_2 - 1), \omega_1(m_1, m_2))$ wählt.

Die zweiten Ableitungen werden unter Verwendung der Produktregeln

$$\begin{aligned} D_h^1(uv) &= u(m_1 + 1, m_2) D_h^1 v + v D_h^1 u \quad \text{und} \\ D_h^{-1}(uv) &= u(m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} v + v D_h^{-1} u \end{aligned}$$

konstruiert. Es sei

$$\begin{aligned} u_{m_1 m_1} &= u_{\omega_0}(m_1 + 1, m_2) D_h^1 D_h^{-1} \omega_0 + D_h^{-1} \omega_0 D_h^1 u_{\omega_0} \\ &\quad + u_{\omega_1}(m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} D_h^1 \omega_1 + D_h^1 \omega_1 D_h^{-1} u_{\omega_1} \end{aligned}$$

mit $D_h^1 u_{\omega_0} = u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^1 \omega_1$ und

$$\begin{aligned} u_{\omega_0 \omega_0} &= \frac{u(\omega_0(m_1 + 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{(\omega_0(m_1 + 1, m_2) - \omega_0(m_1, m_2))(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))} \\ &\quad + \frac{-u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) + u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\omega_0 \omega_1} &= \frac{u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \\ &\quad + \frac{-u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) + u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))}{(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \end{aligned}$$

sowie $D_h^{-1} u_{\omega_1} = u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^1 \omega_1$ mit

$$\begin{aligned} u_{\omega_1 \omega_0} &= \frac{u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \\ &\quad + \frac{-u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) + u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\omega_0 \omega_1} &= \frac{u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \\ &\quad + \frac{-u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) + u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 - 1, m_2))}{(\omega_1(m_1, m_2) - \omega_1(m_1 - 1, m_2))(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2))} \end{aligned}$$

In Analogie wird definiert

$$\begin{aligned} u_{m_1 m_2} &= u_{\omega_0}(m_1 + 1, m_2) D_h^2 D_h^{-1} \omega_0 + D_h^{-1} \omega_0 D_h^2 u_{\omega_0} \\ &\quad + u_{\omega_1}(m_1 - 1, m_2) D_h^{-2} D_h^1 \omega_1 + D_h^1 \omega_1 D_h^{-2} u_{\omega_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{m_2 m_1} &= u_{\omega_0}(m_1 + 1, m_2) D_h^1 D_h^{-2} \omega_0 + D_h^{-2} \omega_0 D_h^1 u_{\omega_0} \\ &\quad + u_{\omega_1}(m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} D_h^2 \omega_1 + D_h^2 \omega_1 D_h^{-1} u_{\omega_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{m_2 m_2} &= u_{\omega_0}(m_1 + 1, m_2) D_h^2 D_h^{-2} \omega_0 + D_h^{-2} \omega_0 D_h^2 u_{\omega_0} \\ &\quad + u_{\omega_1}(m_1 - 1, m_2) D_h^{-2} D_h^2 \omega_1 + D_h^2 \omega_1 D_h^{-2} u_{\omega_1} \end{aligned}$$

mit $D_h^2 u_{\omega_0} = u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^2 \omega_1$ und $D_h^{-2} u_{\omega_1} = u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^2 \omega_1$.
Damit das Problem

$$\begin{aligned}
f &= a u_{m_1 m_1} + b u_{m_1 m_2} + b u_{m_2 m_1} + c u_{m_2 m_2} \\
&= a u_{\omega_0} (m_1 + 1, m_2) D_h^1 D_h^{-1} \omega_0 + a D_h^{-1} \omega_0 (u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^1 \omega_1) \\
&\quad + a u_{\omega_1} (m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} D_h^1 \omega_1 + a D_h^1 \omega_1 (u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^1 \omega_1) \\
&\quad + b u_{\omega_0} (m_1 + 1, m_2) D_h^2 D_h^{-1} \omega_0 + b D_h^{-1} \omega_0 (u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^2 \omega_1) \\
&\quad + b u_{\omega_1} (m_1 - 1, m_2) D_h^{-2} D_h^1 \omega_1 + b D_h^1 \omega_1 (u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^2 \omega_1) \\
&\quad + b u_{\omega_0} (m_1 + 1, m_2) D_h^1 D_h^{-2} \omega_0 + b D_h^{-2} \omega_0 (u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^1 \omega_1) \\
&\quad + b u_{\omega_1} (m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} D_h^2 \omega_1 + b D_h^2 \omega_1 (u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-1} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^1 \omega_1) \\
&\quad + c u_{\omega_0} (m_1 + 1, m_2) D_h^2 D_h^{-2} \omega_0 + c D_h^{-2} \omega_0 (u_{\omega_0 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_0 \omega_1} D_h^2 \omega_1) \\
&\quad + c u_{\omega_1} (m_1 - 1, m_2) D_h^{-2} D_h^2 \omega_1 + c D_h^2 \omega_1 (u_{\omega_1 \omega_0} D_h^{-2} \omega_0 + u_{\omega_1 \omega_1} D_h^2 \omega_1)
\end{aligned}$$

auf die Gleichung $u_{\omega_0 \omega_0} + u_{\omega_1 \omega_1} = \tilde{f}$ zurückgeführt werden kann, muss gelten

$$\begin{aligned}
&a (D_h^{-1} \omega_0)^2 + b (D_h^{-1} \omega_0) (D_h^{-2} \omega_0) + b (D_h^{-2} \omega_0) (D_h^{-1} \omega_0) + c (D_h^{-2} \omega_0)^2 \\
&= a (D_h^1 \omega_1)^2 + b (D_h^1 \omega_1) (D_h^2 \omega_1) + b (D_h^2 \omega_1) (D_h^1 \omega_1) + c (D_h^2 \omega_1)^2 \\
0 &= a (D_h^{-1} \omega_0) (D_h^1 \omega_1) + b (D_h^{-1} \omega_0) (D_h^2 \omega_1) + b (D_h^{-2} \omega_0) (D_h^1 \omega_1) + c (D_h^{-2} \omega_0) (D_h^2 \omega_1) \\
0 &= a D_h^1 D_h^{-1} \omega_0 + b D_h^2 D_h^{-1} \omega_0 + b D_h^1 D_h^{-2} \omega_0 + c D_h^2 D_h^{-2} \omega_0 \\
0 &= a D_h^{-1} D_h^1 \omega_1 + b D_h^{-2} D_h^1 \omega_1 + b D_h^{-1} D_h^2 \omega_1 + c D_h^{-2} D_h^2 \omega_1 .
\end{aligned}$$

Gezeigt wird im weiteren, dass alle diese Gleichungen mit Hilfe der Transformation

$$\begin{aligned}
D_h^{-1} \omega_0 &= \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \\
-D_h^{-2} \omega_0 &= \frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1
\end{aligned} \tag{3.15}$$

mit $\Delta = ac - b^2 > 0$ zu wahren Aussagen werden. Gleichzeitig folgt aus dieser Transformation

$$\begin{aligned}
D_h^2 \omega_1 &= \frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \\
-D_h^1 \omega_1 &= \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Untersucht wird zunächst die erste Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned}
&a (D_h^{-1} \omega_0)^2 + b (D_h^{-1} \omega_0) (D_h^{-2} \omega_0) + b (D_h^{-2} \omega_0) (D_h^{-1} \omega_0) + c (D_h^{-2} \omega_0)^2 \\
&= a \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right)^2 + 2b \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right) \left(-\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c \left(-\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right)^2 \\
& = (D_h^1 \omega_1)^2 \left(\frac{ab^2}{\Delta} - \frac{2ab^2}{\Delta} + \frac{ca^2}{\Delta} \right) + (D_h^1 \omega_1)(D_h^2 \omega_1) \left(\frac{2abc}{\Delta} - \frac{2b^3}{\Delta} - \frac{2abc}{\Delta} + \frac{2abc}{\Delta} \right) \\
& \quad + (D_h^2 \omega_1)^2 \left(\frac{ac^2}{\Delta} - \frac{2b^2c}{\Delta} + \frac{b^2c}{\Delta} \right) \\
& = a(D_h^1 \omega_1)^2 \left(\frac{ac - b^2}{\Delta} \right) + 2b(D_h^1 \omega_1)(D_h^2 \omega_1) \left(\frac{ac - b^2}{\Delta} \right) + c(D_h^2 \omega_1)^2 \left(\frac{ac - b^2}{\Delta} \right) \\
& = a(D_h^1 \omega_1)^2 + 2b(D_h^1 \omega_1)(D_h^2 \omega_1) + c(D_h^2 \omega_1)^2.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite der zweiten Gleichung gilt

$$\begin{aligned}
& a(D_h^{-1} \omega_0)(D_h^1 \omega_1) + b(D_h^{-1} \omega_0)(D_h^2 \omega_1) + b(D_h^{-2} \omega_0)(D_h^1 \omega_1) + c(D_h^{-2} \omega_0)(D_h^2 \omega_1) \\
& = a(D_h^{-1} \omega_0) \left(-\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) + b(D_h^{-1} \omega_0) \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
& \quad + b(D_h^{-2} \omega_0) \left(-\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) + c(D_h^{-2} \omega_0) \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
& = (D_h^{-1} \omega_0)^2 \left(-\frac{ab}{\sqrt{\Delta}} + \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} \right) + (D_h^{-1} \omega_0)(D_h^{-2} \omega_0) \left(-\frac{ac}{\sqrt{\Delta}} + \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} - \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} + \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} \right) \\
& \quad + (D_h^{-2} \omega_0)^2 \left(-\frac{bc}{\sqrt{\Delta}} + \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die restlichen beiden rechten Seiten wegen $D_h^1 D_h^2 \omega_1 = D_h^2 D_h^1 \omega_1$

$$\begin{aligned}
& a D_h^1 D_h^{-1} \omega_0 + b D_h^2 D_h^{-1} \omega_0 + b D_h^1 D_h^{-2} \omega_0 + c D_h^2 D_h^{-2} \omega_0 \\
& = a D_h^1 \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right) + b D_h^2 \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 + \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right) \\
& \quad + b D_h^1 \left(-\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right) + c D_h^2 \left(-\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^1 \omega_1 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^2 \omega_1 \right) \\
& = D_h^1 D_h^1 \omega_1 \left(\frac{ab}{\sqrt{\Delta}} - \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} \right) + D_h^1 D_h^2 \omega_1 \left(\frac{ac}{\sqrt{\Delta}} + \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} - \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} - \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} \right) \\
& \quad + D_h^2 D_h^2 \omega_1 \left(\frac{bc}{\sqrt{\Delta}} - \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} \right) = 0
\end{aligned}$$

und wegen $D_h^{-1} D_h^{-2} \omega_0 = D_h^{-2} D_h^{-1} \omega_0$

$$\begin{aligned}
& a D_h^{-1} D_h^1 \omega_1 + b D_h^{-2} D_h^1 \omega_1 + b D_h^{-1} D_h^2 \omega_1 + c D_h^{-2} D_h^2 \omega_1 \\
& = a D_h^{-1} \left(-\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) + b D_h^{-2} \left(-\frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
& \quad + b D_h^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) + c D_h^{-2} \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D_h^{-1} D_h^{-1} \omega_0 \left(-\frac{ab}{\sqrt{\Delta}} + \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} \right) + D_h^{-1} D_h^{-2} \omega_0 \left(-\frac{ac}{\sqrt{\Delta}} - \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} + \frac{b^2}{\sqrt{\Delta}} + \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} \right) \\
&\quad D_h^{-2} D_h^{-2} \omega_0 \left(-\frac{bc}{\sqrt{\Omega}} + \frac{bc}{\sqrt{\Omega}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Gleichungen der Gestalt $u_{\omega_0 \omega_0} + u_{\omega_1 \omega_1} = \tilde{f}$ können in Analogie zum kontinuierlichen Fall gelöst werden, da auch in der diskreten Theorie die Faktorisierung des Laplaceoperators möglich ist.

Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob in Analogie zum Ansatz (3.14) eine entsprechende Vorgehensweise in der diskreten Theorie möglich ist. Dazu werden zunächst die zweiten Ableitungen nach ω_0 und ω_1 umgeschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned}
u_{\omega_0 \omega_0} &= \frac{u_{\omega_0}(\omega_0(m_1 + 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
u_{\omega_0 \omega_1} &= \frac{u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
u_{\omega_1 \omega_0} &= \frac{u_{\omega_1}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
u_{\omega_1 \omega_1} &= \frac{u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 - 1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)}
\end{aligned}$$

Das folgende Systems von Gleichungen erster Ordnung ist das diskrete Analogon zu (3.14).

$$\begin{aligned}
&u_{\omega_0}(\omega_0(m_1 + 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - v_{\omega_1}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) \\
&= a u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) + b v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) \\
&u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) + v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) \\
&= b u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - a v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))
\end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&u_{\omega_0 \omega_0} - v_{\omega_1 \omega_0} \\
&= \frac{u_{\omega_0}(\omega_0(m_1 + 1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
&\quad - \frac{v_{\omega_1}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - v_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
&= \frac{a u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) + b v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
&\quad - \frac{a u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - b v(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \frac{u(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
&\quad + b \frac{v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - v(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))}{\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)} \\
&= a u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) + b v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&u_{\omega_1\omega_1} + v_{\omega_0\omega_1} \\
&= \frac{u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 - 1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&\quad + \frac{v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&= \frac{b u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - a v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&\quad + \frac{-b u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) + a v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&= b \frac{u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&\quad - a \frac{v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1, m_2))}{\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)} \\
&= b u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - a v_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))
\end{aligned}$$

Damit erhält man als Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
&u_{\omega_0\omega_0} - v_{\omega_1\omega_0} + u_{\omega_1\omega_1} + v_{\omega_0\omega_1} \\
&= a u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) + b v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) \\
&\quad + b u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - a v_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) \\
&= a (u_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - v_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))) \\
&\quad + b (v_{\omega_0}(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) + u_{\omega_1}(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)))) \\
&= a (a u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) + b v(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2))) \\
&\quad + b (b u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) - a v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)))) \\
&= a^2 u(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) + b^2 u(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)) \\
&\quad + ab v(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - ab v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2))
\end{aligned}$$

Auch wenn die Gleichung in der diskreten Version komplizierter ist und sich vor allem die mit der Funktion v im Zusammenhang stehenden Summanden auf Grund der unterschiedlichen Gitterpunkte nicht wegheben, so ist dennoch für $h \rightarrow 0$ die Beziehung zur klassischen Differentialgleichung erkennbar. Genauere Aussagen zum Konvergenzverhalten sind möglich, wenn man auf der rechten Seite den Ausdruck

$$ab v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))$$

subtrahiert und im Sinne einer additiven Null wieder addiert. Auf diese Weise entstehen die Differenzen

$$ab v(\omega_0(m_1 - 1, m_2), \omega_1(m_1 + 2, m_2)) - ab v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2))$$

und

$$ab v(\omega_0(m_1, m_2), \omega_1(m_1, m_2)) - ab v(\omega_0(m_1 - 2, m_2), \omega_1(m_1 + 1, m_2)),$$

die man jeweils als Differenzenableitung multipliziert mit dem Faktor h ansehen kann, auch wenn es sich hier nicht um unmittelbar benachbarte Gitterpunkte handelt.

Es ist schon bemerkenswert, dass trotz der vielen einfließenden Nachbargitterpunkte ein System von Gleichungen erster Ordnung existiert, welches für das Problem zweiter Ordnung von so großer Bedeutung ist.

Im Mittelpunkt steht nun die Beltramigleichung, deren Lösung sowohl im kontinuierlichen als auch im diskreten Fall jeweils auf der bereits erwähnten Koordinatentransformation beruht.

Im klassischen Fall wird die Gleichung

$$\partial_{\bar{z}} w + q(z) \partial_z w = 0 \quad \text{mit} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

und $\omega = \omega_0 + i\omega_1$ Beltramigleichung genannt. Dabei hängt die komplexe Funktion

$$q(z) = q_0 + iq_1 = \frac{a - c + 2ib}{a + c + 2\sqrt{\Delta}} \quad \text{mit} \quad \Delta = ac - b^2 > 0$$

mit den konstanten Koeffizienten der Differentialgleichung

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = f$$

zusammen. Man kann leicht nachrechnen, dass die Beltramigleichung unter Verwendung der angegebenen klassischen Transformation erfüllt ist.

Entsprechend wird in der diskreten Theorie die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 - hD_h^{-1}D_h^2 \\ -D_h^{-2} - hD_h^1D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0(m_1 - 1, m_2) \\ \omega_1(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als *diskrete Beltramigleichung* bezeichnet.

Zu beweisen ist, dass unter Verwendung der Transformation (3.16) sowie den Beziehungen

$$\begin{aligned}
D_h^1 \omega_0(m_1 - 1, m_2) &= h^{-1}(\omega_0(m_1, m_2) - \omega_0(m_1 - 1, m_2)) \\
&= D_h^{-1} \omega_0(m_1, m_2) \\
(D_h^2 - h D_h^{-1} D_h^2) \omega_1(m_1 + 1, m_2) &= D_h^2 \omega_1(m_1 + 1, m_2) - D_h^2(m_1 + 1, m_2) \\
&\quad + D_h^2 \omega_1(m_1, m_2) = D_h^2 \omega_1(m_1, m_2) \\
(-D_h^{-2} - h D_h^1 D_h^{-2}) \omega_0(m_1 - 1, m_2) &= -D_h^{-2} \omega_0(m_1 - 1, m_2) - D_h^{-2} \omega_0(m_1, m_2) \\
&\quad + D_h^{-2} \omega_0(m_1 - 1, m_2) = -D_h^{-2} \omega_0(m_1, m_2) \\
D_h^{-1} \omega_1(m_1 + 1, m_2) &= h^{-1}(\omega_1(m_1 + 1, m_2) - \omega_1(m_1, m_2)) \\
&= D_h^1 \omega_1(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

die diskrete Beltramigleichung erfüllt ist.

In der ersten Komponente gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(D_h^{-1} \omega_0 - D_h^2 \omega_1) + \frac{1}{2} \frac{a - c}{a + c + 2\sqrt{\Delta}}(D_h^{-1} \omega_0 + D_h^2 \omega_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{2b}{a + c + 2\sqrt{\Delta}}(-D_h^{-2} \omega_0 + D_h^1 \omega_1) \\
&= \frac{1}{2} \left(D_h^{-1} \omega_0 - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{a - c}{a + c + 2\sqrt{\Delta}} \left(D_h^{-1} \omega_0 + \frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{2b}{a + c + 2\sqrt{\Delta}} \left(-D_h^{-2} \omega_0 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
&= \frac{1}{2(a + c + 2\sqrt{\Delta})} \left(a D_h^{-1} \omega_0 - \frac{a^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 + c D_h^{-1} \omega_0 - \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 + 2\sqrt{\Delta} D_h^{-1} \omega_0 - 2a D_h^{-1} \omega_0 - 2b D_h^{-2} \omega_0 + a D_h^{-1} \omega_0 + \frac{a^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 - c D_h^{-1} \omega_0 - \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 - \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 + 2b D_h^{-2} \omega_0 + \frac{2b^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1} \omega_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2bc}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2} \omega_0 \right) \\
&= \frac{1}{2(a + c + 2\sqrt{\Delta})} \left(\left(-\frac{2ac}{\sqrt{\Delta}} + 2\sqrt{\Delta} + \frac{2b^2}{\sqrt{\Delta}} \right) D_h^{-1} \omega_0 \right) = 0.
\end{aligned}$$

In der zweiten Komponente erhält man

$$\frac{1}{2}(D_h^{-2} \omega_0 + D_h^1 \omega_1) + \frac{1}{2} \frac{2b}{a + c + 2\sqrt{\Delta}}(D_h^{-1} \omega_0 + D_h^2 \omega_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{a-c}{a+c+2\sqrt{\Delta}} (-D_h^{-2}\omega_0 + D_h^1\omega_1) \\
& = \frac{1}{2} \left(D_h^{-2}\omega_0 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{2b}{a+c+2\sqrt{\Delta}} \left(D_h^{-1}\omega_0 + \frac{a}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{a-c}{a+c+2\sqrt{\Delta}} \left(-D_h^{-2}\omega_0 - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 - \frac{c}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 \right) \\
& = \frac{1}{2(a+c+2\sqrt{\Delta})} \left(aD_h^{-2}\omega_0 - \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 - \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 + cD_h^{-2}\omega_0 - \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 \right. \\
& \quad - \frac{c^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 + 2\sqrt{\Delta} D_h^{-2}\omega_0 - 2bD_h^{-1}\omega_0 - 2cD_h^{-2}\omega_0 + 2bD_h^{-1}\omega_0 + \frac{2ab}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 \\
& \quad + \frac{2b^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 - aD_h^{-2}\omega_0 - \frac{ab}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 - \frac{ac}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 + cD_h^{-2}\omega_0 + \frac{bc}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-1}\omega_0 \\
& \quad \left. + \frac{c^2}{\sqrt{\Delta}} D_h^{-2}\omega_0 \right) \\
& = \frac{1}{2(a+c+2\sqrt{\Delta})} \left(\left(-\frac{2ac}{\sqrt{\Delta}} + 2\sqrt{\Delta} + \frac{2b^2}{\sqrt{\Delta}} \right) D_h^{-2}\omega_0 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Beltramigleichung erfüllt und der Beweis vollständig geführt. Im weiteren steht die Definition eines diskreten Π -Operators im Mittelpunkt. Dazu wird wieder das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{m \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} u_0(m) \\ u_1(m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_0(m) \\ v_1(m) \end{pmatrix}$$

betrachtet und gefordert, dass $u(r) = v(r) = (0, 0)^T$ in allen Gitterpunkten r außerhalb von G_h gelten soll, falls auf diese Gitterpunkte zugegriffen wird. Auf Grund der Nullrandwerte hat der zum Operator D^{1h} gehörende rechtsinverse Operator T^{1h} die einfache Gestalt $T^{1h} = (T_{h1}^1, T_{h2}^1)^T$ mit

$$(T_{hk}^1 u)(m) = \sum_{l \in G_h} h^2 \begin{pmatrix} E_{hk1}^1(m-l) \\ E_{hk2}^1(m-l) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_0(l) \\ u_1(l) \end{pmatrix}.$$

Man beachte dazu die Ausführungen am Ende des Abschnittes 2.3.2.

Das Ziel ist es nun, den in Bezug auf das Skalarprodukt adjungierten Operator $\overline{T^{1h}}$ zu finden, für den gilt $\langle T^{1h}u, v \rangle = \langle u, \overline{T^{1h}}v \rangle$. Um die entsprechenden Umformungen vornehmen zu können, sind zwei Überlegungen von Bedeutung: Zunächst interessiert der Zusammenhang zwischen den Komponenten von $E_h^2(m-l)$ und $E_h^2(l-m)$. Dazu wird die im Abschnitt 2.2.2 vorgestellte Schreibweise für die diskrete Fundamentallösung genutzt. Für die einzelnen Komponenten erhält man mit

Hilfe der Substitution $\xi_1^{neu} = -\xi_1$ und $\xi_2^{neu} = -\xi_2$ die Beziehung

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{\xi_{\pm t}^h}{d^2} e^{-ih \langle m-l, \xi \rangle} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{\xi_{\mp t}^h}{d^2} e^{-ih \langle l-m, \xi \rangle} d\xi$$

mit $t \in \{1, 2\}$. Daraus leiten sich die Eigenschaften $E_{h11}^2(m-l) = -E_{h22}^2(l-m)$ und $E_{h12}^2(m-l) = E_{h21}^2(l-m)$ ab. Andererseits soll der Zusammenhang zwischen den Fundamentallösungen $E_h^1(m)$ und $E_h^2(m)$ genutzt werden. Nach Abschnitt 2.2.2 gilt $E_{h11}^1(mh) = E_{h22}^2(mh)$, $E_{h12}^1(mh) = -E_{h12}^2(mh)$, $E_{h21}^1(mh) = -E_{h21}^2(mh)$ und $E_{h22}^1(mh) = E_{h11}^2(mh)$. Für das Skalarprodukt erhält man somit

$$\begin{aligned} & \langle T^{1h} u, v \rangle \\ &= \sum_{m \in G_h} h^2 \left[\sum_{l \in G_h} h^2 (E_{h11}^1(m-l) u_0(l) + E_{h12}^1(m-l) u_1(l)) v_0(m) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l \in G_h} h^2 (E_{h21}^1(m-l) u_0(l) + E_{h22}^1(m-l) u_1(l)) v_1(m) \right] \\ &= \sum_{m \in G_h} h^2 \left[\sum_{l \in G_h} h^2 (E_{h22}^2(m-l) u_0(l) - E_{h12}^2(m-l) u_1(l)) v_0(m) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l \in G_h} h^2 (-E_{h21}^2(m-l) u_0(l) + E_{h11}^2(m-l) u_1(l)) v_1(m) \right] \\ &= \sum_{l \in G_h} h^2 \left[\sum_{m \in G_h} h^2 (-E_{h11}^2(l-m) v_0(m) - E_{h12}^2(l-m) v_1(m)) u_0(l) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m \in G_h} h^2 (-E_{h21}^2(l-m) v_0(m) - E_{h22}^2(l-m) v_1(m)) u_1(l) \right] \\ &= \langle u, -T^{2h} v \rangle \end{aligned}$$

und für den Operator $\overline{T^{1h}}$ gilt $\overline{T^{1h}} = -T^{2h}$ mit $(D^{2h}(T^{2h}u))(m) = u(m) \forall m \in G_h$.

Als *diskreter Π -Operator* wird in Analogie zum kontinuierlichen Fall der Operator $\Pi^{1h} = -D^{1h} T^{2h}$ bezeichnet. Ebenso gelangt man durch Wiederholung der Überlegungen zum Operator $\Pi^{2h} = -D^{2h} T^{1h}$. Diese beiden diskreten Π -Operatoren besitzen folgende Eigenschaften:

Für diskret holomorphe Funktionen u mit $D^{1h}u = 0$ und $u(r) = (0, 0)^T$ auf dem Rand folgt auf Grund der Beziehung $D^{1h} D^{2h} = D^{2h} D^{1h} = I_2 \Delta_h$ (vgl. Abschnitt 2.2.2)

$$D^{2h} \Pi^{1h} u = D^{2h} (-D^{1h} (T^{2h} u)) = -D^{1h} (D^{2h} (T^{2h} u)) = -D^{1h} u = 0.$$

Auf analoge Weise erhält man unter der Voraussetzung $D^{2h}u = 0$ die Beziehung $D^{1h} \Pi^{2h} u = 0$.

Es soll nun mit Hilfe des Operators Π^{2h} die Lösung der diskreten Beltramigleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 - hD_h^{-1}D_h^2 \\ -D_h^{-2} - hD_h^1D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0(m_1 - 1, m_2) \\ \omega_1(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beschrieben werden. Dazu wird der Ansatz

$$\begin{pmatrix} W_0(m_1, m_2) \\ W_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T_{h1}^1 f)(m) \\ (T_{h2}^1 f)(m) \end{pmatrix}$$

mit der noch unbekannten Funktion $f = (f_0, f_1)^T$ in die Beltramigleichung eingesetzt.

Mit $(\Pi^{2h} f)(m) = ((\Pi_{h1}^2 f)(m), (\Pi_{h2}^2 f)(m))^T$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} D^{1h} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T_{h1}^1 f)(m) \\ (T_{h2}^1 f)(m) \end{pmatrix} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} D^{2h} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 - 1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T_{h1}^1 f)(m_1 - 1, m_2) \\ (T_{h2}^1 f)(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \right) \\ &- \frac{h}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^{-1} D_h^2 \left(\frac{1}{2} m_2 + (T_{h2}^1 f)(m_1 + 1, m_2) \right) \\ D_h^1 D_h^{-2} \left(\frac{1}{2} m_1 - 1 + (T_{h1}^1 f)(m_1 - 1, m_2) \right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} D^{1h} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_0(m_1, m_2) \\ f_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} D^{2h} \begin{pmatrix} m_1 - 1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\Pi_{h1}^2 f)(m_1 - 1, m_2) \\ (\Pi_{h2}^2 f)(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \right) \\ &- \frac{h}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^{-1} D_h^2 \left(\frac{1}{2} m_2 + (T_{h2}^1 f)(m_1 + 1, m_2) \right) \\ D_h^1 D_h^{-2} \left(\frac{1}{2} (m_1 - 1) + (T_{h1}^1 f)(m_1 - 1, m_2) \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Beziehungen

$$D^{1h} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} D^{2h} \begin{pmatrix} m_1 - 1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

reduziert sich die Gleichung auf

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_0(m_1, m_2) \\ f_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\Pi_{h1}^2 f)(m_1 - 1, m_2) \\ (\Pi_{h2}^2 f)(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \right) \\ &- \frac{h}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^{-1} D_h^2 \left(\frac{1}{2} m_2 + (T_{h2}^1 f)(m_1 + 1, m_2) \right) \\ D_h^1 D_h^{-2} \left(\frac{1}{2} (m_1 - 1) + (T_{h1}^1 f)(m_1 - 1, m_2) \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich muss die noch zu bestimmende Funktion $f = (f_0, f_1)^T$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_0(m_1, m_2) \\ f_1(m_1, m_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Pi_{h1}^2 f)(m_1 - 1, m_2) \\ (\Pi_{h2}^2 f)(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^{-1} D_h^2 \left(\frac{1}{2} m_2 h + (T_{h2}^1 f)(m_1 + 1, m_2) \right) \\ D_h^1 D_h^{-2} \left(\frac{1}{2} (m_1 - 1) + (T_{h1}^1 f)(m_1 - 1, m_2) \right) \end{pmatrix}$$

erfüllen. Diese Gleichung approximiert die aus der klassischen Theorie bekannte Gleichung $q = -f + q\Pi f$, die insbesondere von Tricomi [Tri] studiert wurde. Vernachlässigt man zunächst den letzten Summanden, der für $h \rightarrow 0$ sehr klein wird und auch die Verschiebung in den Gitterpunkten im zweiten Summand, die mit Hilfe eines Shiftoperators der Norm 1 beschrieben werden kann, so interessiert an dieser Stelle die Frage, ob der Operator $I_2 - q\Pi^{2h}$ invertierbar ist. Im Sinne des Banachschen Fixpunktsatzes ist zu untersuchen, ob die Norm des Operators Π^{2h} beschränkt ist. Auf Grund der Eigenschaft $D^{1h}(T^{1h}f)(m) = f(m)$ und Lemma 2.4.3 gilt $(T^{1h}f)(m) \in \text{im } Q_h^+$. Mit Hilfe von Lemma 2.4.2 und dessen Übertragung auf die andere Approximation der Cauchy-Riemann Operatoren erhält man allgemein

$$\begin{aligned} \langle \Pi^{2h} f, \Pi^{2h} g \rangle &= \langle -D^{2h}(T^{1h}f), -D^{2h}(T^{1h}g) \rangle = \langle D^{1h}D^{2h}(T^{1h}f), -T^{1h}g \rangle \\ &= \langle D^{2h}D^{1h}(T^{1h}f), -T^{1h}g \rangle = \langle D^{2h}f, -T^{1h}g \rangle \\ &= \langle f, D^{1h}(T^{1h}g) \rangle = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Diese Isometrie gilt auch im Spezialfall $f = g$. Damit ist die Norm des Operators Π^{2h} gleich 1 und somit die Beschränktheit gesichert.

Erwähnt sei auch, dass die hier angegebene Differenzengleichung auf Grund der Struktur der diskreten Fundamentallösung (siehe Lemma 2.2.1) für feste Schrittweite h keine Polstelle aufweist. Die Tatsache, dass erst beim Grenzübergang das singuläre Verhalten zum Ausdruck kommt, erweist sich als sehr vorteilhaft bei der weiteren Untersuchung der Gleichung. Insgesamt zeigen die Ausführungen, dass auf dem Gebiet der Beltramigleichungen eine ganze Reihe von Parallelen zwischen dem kontinuierlichen und diskreten Fall bestehen. Die erzielten Resultate können als Ausgangspunkt für den weiteren Ausbau der diskreten Theorie betrachtet werden.

3.3 Gleichungen zweiter und höherer Ordnung

3.3.1 Das diskrete Stokesproblem in der Ebene

Betrachtet wird das Differenzenrandwertproblem

$$-\Delta_h u_0(m) + \frac{1}{\mu} D_h^1 p(m) = \frac{\varrho}{\mu} f_0(m) \quad \forall m \in G_h$$

$$\begin{aligned}
-\Delta_h u_1(m) + \frac{1}{\mu} D_h^2 p(m) &= \frac{\varrho}{\mu} f_1(m) & \forall m \in G_h \\
D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= 0 & \forall m \in G_h \\
u(r) = (u_0(r), u_1(r))^T &= (0, 0)^T & \forall r \in \gamma_h^-,
\end{aligned}$$

wobei ϱ die Dichte, μ die Viskosität, p den Druck, f_0 und f_1 die Vektorkomponenten der äußeren Kräfte und u_0 sowie u_1 die Geschwindigkeitskomponenten des fließenden Mediums bezeichnen. In Vorbereitung auf den Beweis der Existenz einer Lösung dieses Randwertproblems werden einige Eigenschaften bewiesen, die auf der orthogonalen Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ beruhen. Einige der Beweisideen sind schon im Buch [GS1] zu finden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass hier nicht mit reinen Vorwärts- oder Rückwärtsableitungen sondern mit Operatoren gearbeitet wird, die den diskreten Laplaceoperator faktorisieren. Mehrere der hier vorgestellten Resultate zu Stokes- Gleichungen und auch zu Navier- Stokes- Gleichungen wurden bereits in der Arbeit [GH9] und ausführlicher in der Arbeit [GH5] veröffentlicht.

Lemma 3.3.1 *Für Funktionen $u(m) = (u_0(m), u_1(m))^T \in \dot{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ und $p(m) \in l_2(G_h)$ gilt*

$$\langle D_{h,M}^2 u, Q_h^+[0, p] \rangle = 0.$$

Beweis: Aus Lemma 2.4.1, Lemma 2.4.2 und der Eigenschaft $\operatorname{div}_h^- u(m) = 0$ resultiert

$$\begin{aligned}
&\langle D_{h,M}^2 u, Q_h^+[0, p] \rangle = \langle D_{h,M}^2 u, (I_2 - P_h^+)[0, p] \rangle \\
&= \sum_{mh \in G_h} h^2 (\operatorname{div}_h^- u(m)) p(m) + \langle u, D_{h,M}^1 P_h^+[0, p] \rangle = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Der Beweis des folgenden Satzes beruht unmittelbar auf Lemma 3.3.1.

Satz 3.3.1 *Für jedes $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T \in l_2(G_h)$ existieren Funktionen $u(m) = (u_0(m), u_1(m))^T \in \dot{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ und $p(m) \in l_2(G_h)$ so dass gilt*

$$\frac{\varrho}{\mu} (Q_h^+(T_{h,M}^1 f))(m) = -D_{h,M}^2 u(m) + \frac{1}{\mu} (Q_h^+[0, p])(m). \quad (3.17)$$

Dabei ist $T_{h,M}^1$ der rechtsinverse Operator zum Operator $D_{h,M}^1$.

Beweis: Offensichtlich liegen $D_{h,M}^2 u(m)$ und $(Q_h^+[0, p])(m)$ im Bildbereich des Operators Q_h^+ . Ferner wurde in Lemma 3.3.1 die Orthogonalität der beiden Ausdrücke bezüglich des Skalarproduktes bewiesen. Gezeigt wird nun, dass es keinen weiteren orthogonalen Teilraum geben kann, indem aus

$$\langle -D_{h,M}^2 u, Q_h^+(T_{h,M}^1 f) \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad u(m) \in \dot{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^- \quad (3.18)$$

und

$$\langle Q_h^+[0, p], Q_h^+(T_{h,M}^1 f) \rangle = 0 \quad \text{für alle } p(m) \in l_2(G_h) \quad (3.19)$$

$f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T = (0, 0)^T$ folgt. Zunächst gilt nach Lemma 2.4.1 und Lemma 2.4.2

$$\langle -D_{h,M}^2 u, Q_h^+(T_{h,M}^1 f) \rangle = \langle u, D_{h,M}^1 Q_h^+(T_{h,M}^1 f) \rangle = \langle u, D_{h,M}^1 (T_{h,M}^1 f) \rangle = \langle u, f \rangle .$$

Auf Grund der im Lemma 2.4.3 bewiesenen Eigenschaft $\ker \operatorname{div}_h^- = (\operatorname{im} \operatorname{grad}_h^+)^\perp$ gibt es ein $g_0(m)$ mit $g_0(r) = 0$ auf $\gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-$, so dass aus $f_0(m) = D_h^1 g_0(m)$ und $f_1(m) = D_h^2 g_0(m)$ für alle $m \in G_h$ und $u(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ folgt

$$\langle u, f \rangle = \langle u, \operatorname{grad}_h^+ g_0 \rangle = - \sum_{m \in G_h} h^2 (\operatorname{div}_h^- u(m)) g_0(m) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist Gleichung (3.19) für jede beliebige Funktion $p(m) \in l_2(G_h)$ erfüllt. Betrachtet wird der Spezialfall $p(m) = g_0(m)$. Auf Grund der im Satz 2.3.3 bewiesenen Borel-Pompeiu-Formel gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q_h^+[0, g_0], Q_h^+(T_{h,M}^1 f) \rangle = \langle Q_h^+[0, g_0], Q_h^+ T_{h,M}^1 (D_{h,M}^1 [0, g_0]) \rangle \\ &= \langle Q_h^+[0, g_0], Q_h^+[0, g_0] - Q_h^+(F_{h,M}^1 [0, g_0]) \rangle . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der Operator $F_{h,M}^1$ bildet die Randwerte auf $\ker D_{h,M}^1$ ab und auf Grund der im Satz 2.4.1 bewiesenen orthogonalen Zerlegung des Raumes $l_2(G_h)$ gilt $Q_h^+(F_{h,M}^1 [0, g_0]) = (0, 0)^T$. Daher resultiert aus Gleichung (3.20) $\|Q_h^+[0, g_0]\|_{l_2(G_h)} = 0$. Aus dieser Beziehung und den im Lemma 2.4.1 bewiesenen Eigenschaften der Orthoprojektoren ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} f(m) &= [\operatorname{grad}_h^+ g_0](m) = (D_{h,M}^1 [0, g_0])(m) \\ &= D_{h,M}^1 (Q_h^+[0, g_0])(m) = (0, 0)^T \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wird auf Gleichung (3.17) der zum Operator $D_{h,M}^2$ rechtsinverse Operator $T_{h,M}^2$ angewendet, so folgt aus der Borel-Pompeiu-Formel im Satz 2.3.7 für alle Funktionen $u \in \mathring{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ und $p(m) \in l_2(G_h)$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+(T_{h,M}^1 f))(m) &= -T_{h,M}^2 (D_{h,M}^2 u)(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+[0, p])(m) \\ &= -u(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+[0, p])(m). \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Operatoren $D_{h,M}^1$ und $D_{h,M}^2$ mit der bereits im Kapitel 2 hervorgehobenen Eigenschaft $D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 = I_2 \Delta_h$ kann man nun leicht nachprüfen, dass die Existenz einer Lösung des diskreten Stokesproblems gesichert ist. Im folgenden Satz wird die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.

Satz 3.3.2 *Das Randwertproblem*

$$\begin{aligned}
-I_2 \Delta_h u(m) + \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p](m) &= \frac{\varrho}{\mu} f(m) & \forall m \in G_h \\
D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= 0 & \forall m \in G_h \\
u(r) = (u_0(r), u_1(r))^T &= (0, 0)^T & \forall r \in \gamma_h^-
\end{aligned}$$

besitzt für jede rechte Seite $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T \in l_2(G_h)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u(m) = (u_0(m), u_1(m))^T$. Der Druck $p(m) \in l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)$ ist eindeutig bis auf eine Konstante.

Beweis: Aus Lemma 3.3.1 und Satz 3.3.1 folgt

$$\frac{\varrho^2}{\mu^2} \|Q_h^+(T_{h,M}^1 f)\|_{l_2(G_h)}^2 = \|D_{h,M}^2 u\|_{l_2(G_h)}^2 + \frac{1}{\mu^2} \|Q_h^+[0, p]\|_{l_2(G_h)}^2. \quad (3.21)$$

Zunächst wird angenommen, dass zwei Lösungen $u^1(m) = (u_0^1(m), u_1^1(m))^T$ und $u^2(m) = (u_0^2(m), u_1^2(m))^T$ existieren. Die Differenz $u^*(m) = u^1(m) - u^2(m)$ ist eine Lösung des obigen Differenzenrandwertproblems mit $f(m) = (0, 0)^T$ für alle $m \in G_h$ und ohne den Summanden, der den Druck beinhaltet. Zusätzlich sei $f(r) = (0, 0)^T$ für alle $r \in \gamma_h^-$. In diesem Fall ist die linke Seite der Beziehung (3.21) identisch Null. Folglich muß gelten $D_{h,M}^2 u^*(m) = (0, 0)^T$ für alle $m \in G_h$. Durch Anwendung des rechtsinversen Operators $T_{h,M}^2$ und der diskreten Borel-Pompeiu-Formel ergibt sich $u^*(m) = (0, 0)^T$. Dabei wird die Eigenschaft $F_{h,M}^2 u^* = (0, 0)^T$ berücksichtigt. Im folgenden wird angenommen, dass es zwei Lösungen $\{u(m); p_1(m)\}$ und $\{u(m); p_2(m)\}$ des Randwertproblems gibt. Für die Differenz $p^*(m) = p_1(m) - p_2(m)$ gilt auf Grund der Beziehung (3.21) $Q_h^+[0, p^*] = (0, 0)^T$. Somit liegt $(0, p^*(m))$ im Kern des Operators Q_h^+ , also auch im Kern des Operators $D_{h,M}^1$. Daraus folgt $D_h^1 p^*(m) = 0$ und $D_h^2 p^*(m) = 0$ für alle $m \in G_h$ und somit $p^*(m) = \text{konstant}$ ■

Betrachtet wird nun das Differenzenrandwertproblem

$$\begin{aligned}
-I_2 \Delta_h u(m) + \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p](m) &= \frac{\varrho}{\mu} f(m) & \forall m \in G_h \\
D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= \varphi(m) & \forall m \in G_h \\
u(r) = \psi(r) &= (\psi_0(r), \psi_1(r))^T & \forall r \in \gamma_h^-,
\end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei $\varphi(m)$ ein Maß für die Kompressibilität des fließenden Mediums darstellt und durch $\psi(r)$ die Werte der Geschwindigkeitskomponenten auf dem Rand des Gebietes beschrieben werden. Im Fall $\psi(r) = (0, 0)^T$ tritt Adhäsion ein.

Dieses System ist nur lösbar, wenn die notwendige Bedingung

$$\sum_{m \in G_h} \varphi(m) h^2 + \sum_{r \in \gamma_{h3}^-} D_h^{-1} u_0(r) h^2 + \sum_{r \in \gamma_{h4}^-} D_h^{-2} u_1(r) h^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{r \in \gamma_{hi}^-} \begin{pmatrix} \alpha_0^i \\ \alpha_1^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(r) \\ \psi_1(r) \end{pmatrix} h$$

erfüllt ist. Dabei sind $\begin{pmatrix} \alpha_0^i \\ \alpha_1^i \end{pmatrix}$ die Normaleneinheitsvektoren auf γ_{hi}^- , $i = 1, \dots, 4$.

Speziell gilt $-\begin{pmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^3 \\ \alpha_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-\begin{pmatrix} \alpha_0^2 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^4 \\ \alpha_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die notwendige Bedingung resultiert aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in G_h} \varphi(m) h^2 + \sum_{r \in \gamma_{h3}^-} D_h^{-1} u_0(r) h^2 + \sum_{r \in \gamma_{h4}^-} D_h^{-2} u_1(r) h^2 \\
&= \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h3}^-} D_h^{-1} u_0(m) h^2 + \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h4}^-} D_h^{-2} u_1(m) h^2 \\
&= \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h3}^-} u_0(m) h - \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h1}^-} u_0(m) h + \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h4}^-} u_1(m) h - \sum_{m \in G_h \cup \gamma_{h2}^-} u_1(m) h \\
&= \sum_{m \in \gamma_{h3}^-} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m) \\ u_1(m) \end{pmatrix} h + \sum_{m \in \gamma_{h1}^-} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m) \\ u_1(m) \end{pmatrix} h \\
&\quad + \sum_{m \in \gamma_{h4}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m) \\ u_1(m) \end{pmatrix} h + \sum_{m \in \gamma_{h2}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(m) \\ u_1(m) \end{pmatrix} h.
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $f(m)$ und $\varphi(m)$ für alle $m \in G_h$ gegeben sind, kann folgende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage bewiesen werden:

Satz 3.3.3 *Das Randwertproblem*

$$\begin{aligned}
-I_2 \Delta_h u(m) + \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p](m) &= \frac{\varrho}{\mu} f(m) & \forall m \in G_h \\
D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= \varphi(m) & \forall m \in G_h \\
u(r) &= (T_{h,M}^2[0, \varphi])(r) & \forall r \in \gamma_h^-
\end{aligned} \tag{3.23}$$

besitzt für $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T \in l_2(G_h)$ und $\varphi(m) \in l_2(G_h)$ mit $\varphi(r) = 0$ $\forall r \in \gamma_h^-$ eine eindeutige Lösung $\{u(m); p(m)\}$ im Sinne von Satz 3.3.2.

Beweis: Die Eindeutigkeit der Lösung im Spezialfall $\varphi(m) = 0$ wurde bereits im Satz 3.3.2 bewiesen. Diese Lösung wird mit $\{u_h(m); p_h(m)\}$ bezeichnet. Die Lösung des Problems (3.23) wird durch Addition einer speziellen Lösung bestimmt.

$$\begin{aligned}
\text{Aus dem Ansatz} \quad u(m) &= u_h(m) + (T_{h,M}^2[0, \varphi])(m) & \forall m \in G_h \cup \gamma_h^- \\
p(m) &= p_h(m) + \mu \varphi(m) & \forall m \in G_h
\end{aligned}$$

folgt auf Grund der Rechtsinvertierbarkeit des Operators $T_{h,M}^2$

$$\begin{aligned}
& -I_2 \Delta_h u(m) + \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p](m) \\
&= -I_2 \Delta_h u_h(m) - D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 (T_{h,M}^2[0, \varphi])(m) + \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p_h](m) + [\text{grad}_h^+ \varphi](m) \\
&= \frac{\varrho}{\mu} f(m) - (D_{h,M}^1[0, \varphi])(m) + [\text{grad}_h^+ \varphi](m) = \frac{\varrho}{\mu} f(m).
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind auch die Beziehungen $\operatorname{div}_h^- u(m) = \operatorname{div}_h^-(T_{h,M}^2[0, \varphi])(m) = \varphi(m)$ und $u(r) = (T_{h,M}^2[0, \varphi])(r)$ erfüllt ■

Im folgenden seien im Gleichungssystem (3.22) die rechte Seite $f(m)$ und die Randwerte $\psi(r)$ gegeben. Eine Lösung des Problems (3.22) wird mit Hilfe des Ansatzes

$$u(m) = u_h(m) + u_{\text{spez}}(m), \quad p(m) = p_h(m)$$

bestimmt. Dabei sei $\{u_h(m); p_h(m)\}$ die Lösung des im Satz 3.3.2 betrachteten Randwertproblems, die bezüglich $u_h(m)$ eindeutig ist. Auf Grund der ersten und letzten Gleichung des Problems (3.22) sind die Komponenten $u_{s0}(m)$ und $u_{s1}(m)$ von $u_{\text{spez}}(m)$ Lösungen der Dirichletprobleme

$$-\Delta_h u_{si}(m) = 0 \quad \forall m \in G_h, \quad u_{si}(r) = \psi_i(r) \quad \forall r \in \gamma_h^-, \quad i = 0, 1.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung dieser Probleme wurde bereits in [Ho] gezeigt. Angegeben wird zunächst eine Operatorschreibweise für $u_{s0}(m)$ und $u_{s1}(m)$. Ausgehend von der Beziehung $D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}(m) = (P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m)$ (die gewährleistet, dass die homogene Laplacegleichung erfüllt ist) erhält man mit Hilfe des rechtsinversen Operators $T_{h,M}^2$ und der Borel-Pompeiu-Formel die Darstellung

$$u_{\text{spez}}(m) = (F_{h,M}^2 \psi)(m) + (T_{h,M}^2 P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m).$$

Auf Grund der Eigenschaften $D_{h,M}^2(T_{h,M}^2 P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m) = (P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m)$ und $D_{h,M}^2(F_{h,M}^2 \psi)(m) = (0, 0)^T$ ist die rechte Seite $\varphi(m)$ des Problems (3.22) bestimmt durch

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= D_h^{-1} u_{s0}(m) + D_h^{-2} u_{s1}(m) \\ &= \operatorname{div}_h^-(F_{h,M}^2 \psi)(m) + \operatorname{div}_h^-(T_{h,M}^2 P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m) \\ &= (P_{h2}^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m), \end{aligned}$$

wobei P_{h2}^+ die zweite Zeile in der 2×2 -Matrix bezeichnet, die zu P_h^+ gehört. Die letzten Überlegungen sind im folgenden Satz noch einmal zusammengefaßt:

Satz 3.3.4 *Es seien $u_{s0}(m)$ und $u_{s1}(m)$ Lösungen der Dirichletprobleme*

$$-\Delta_h u_{si}(m) = 0 \quad \forall m \in G_h, \quad u_{si}(r) = \psi_i(r) \quad \forall r \in \gamma_h^-, \quad i = 0, 1$$

und $u_{\text{spez}}(m) = (u_{s0}(m), u_{s1}(m))^T$. Das Differenzenrandwertproblem

$$\begin{aligned} -I_2 \Delta_h u(m) + \frac{1}{\mu} [\operatorname{grad}_h^+ p](m) &= \frac{\varrho}{\mu} f(m) & \forall m \in G_h \\ D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= (P_{h2}^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m) & \forall m \in G_h \\ u(r) &= \psi(r) & \forall r \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung im Sinne von Satz 3.3.2, die durch

$$\begin{aligned} u(m) &= u_h(m) + (F_{h,M}^2 \psi)(m) + (T_{h,M}^2 P_h^+(D_{h,M}^2 u_{\text{spez}}))(m) \\ p(m) &= p_h(m) \end{aligned}$$

beschrieben wird.

3.3.2 Das diskrete Lamésystem

In diesem Abschnitt soll die Theorie der diskreten Operatoren zur Lösung des Lamésystems genutzt werden. Insbesondere kann gezeigt werden, dass die Lösung des Lamésystems gegen die Lösung des diskreten Stokesproblems aus dem Abschnitt 3.3.1 konvergiert, wenn die Poissonzahl gegen 2 strebt. In verkürzter Form wurden die hier vorgestellten Resultate bereits in der Arbeit [GH8] veröffentlicht.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist das ebene Differenzenrandwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta_h u_0(m) + \frac{m_p}{m_p - 2} D_h^1 [D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m)] &= -f_0(m) \quad \forall m \in G_h \\ \Delta_h u_1(m) + \frac{m_p}{m_p - 2} D_h^2 [D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m)] &= -f_1(m) \quad \forall m \in G_h \\ u(r) = (u_0(r), u_1(r))^T &= (0, 0)^T \quad \forall r \in \gamma_h^- . \end{aligned}$$

Dabei ist m_p mit $m_p > 2$ die Poissonzahl, f_0 und f_1 sind die Vektorkomponenten der äußeren Kraft und u_0 und u_1 sind die Komponenten des Verschiebungsvektors u .

Mit Hilfe der Operatoren $D_{h,M}^1$ und $D_{h,M}^2$ aus dem Abschnitt 2.2.2 kann man das obige Differenzenrandwertproblem in der Form

$$\begin{aligned} D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 u(m) + \frac{m_p}{m_p - 2} D_{h,M}^1 M_x^* D_{h,M}^2 u(m) &= -f(m) \quad \forall m \in G_h \\ u(r) &= (0, 0)^T \quad \forall r \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

schreiben. Dabei gilt $u(m) = (u_0(m), u_1(m))^T$, $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ und die Matrix M_x^* hat die Struktur $M_x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Richtigkeit dieser Aussage überprüft man mittels einfacher Matrizenmultiplikation. Ferner können die Terme auf der linken Seite zusammengefaßt werden, so dass schließlich das System

$$\begin{aligned} D_{h,M}^1 M_x^{-1} D_{h,M}^2 u(m) &= -f(m) \quad \forall m \in G_h \\ u(r) &= (0, 0)^T \quad \forall r \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

mit

$$M_x^{-1} = I_2 + \frac{m_p}{m_p - 2} M_x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2(m_p-1)}{m_p-2} \end{pmatrix}$$

entsteht. Vermerkt sei, dass

$$M_x M_x^{-1} = M_x^{-1} M_x = I_2 \quad \text{mit} \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{m_p-2}{m_p-1} \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Für die zu Beginn des Abschnittes erwähnten Konvergenzaussagen wird die im folgenden Lemma angegebene Lösungsdarstellung und speziell deren Eigenschaft benötigt.

Lemma 3.3.2 *Für die Lösung des obigen Differenzenrandwertproblems gilt*

$$u(m) = -(T_{h,M}^2 Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) ,$$

welche auf Grund von Satz 2.3.6 die Eigenschaft

$$D_{h,M}^2 u(m) = -(Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m)$$

aufweist. Dabei bezeichnen $P_{h,M}^+$ und $Q_{h,M}^+ = I_2 - P_{h,M}^+$ die Orthoprojektoren von l_2 nach $M_x \ker D_{h,M}^1 \cap l_2$ beziehungsweise $M_x D_{h,M}^2 (w_2^1(G_h))$.

Beweis: Gezeigt wird zunächst, dass jede Funktion mit der Eigenschaft

$$D_{h,M}^2 u(m) = -(Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m)$$

Lösung der diskreten Lamégleichungen ist. Nach Satz 2.3.1 gilt

$$\begin{aligned} & D_{h,M}^1 M_x^{-1} D_{h,M}^2 u(m) \\ &= -D_{h,M}^1 M_x^{-1} (Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) \\ &= -D_{h,M}^1 M_x^{-1} (M_x (T_{h,M}^1 f))(m) + D_{h,M}^1 M_x^{-1} (P_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) \\ &= -f(m) + D_{h,M}^1 M_x^{-1} (P_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) . \end{aligned}$$

Auf Grund der Abbildungseigenschaft des Orthoprojektors $P_{h,M}^+$ erhält man

$$\begin{aligned} & D_{h,M}^1 M_x^{-1} (P_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) \\ &= D_{h,M}^1 M_x^{-1} M_x w(m) = D_{h,M}^1 w(m) = (0, 0) \quad \text{mit } w(m) \in \ker D_{h,M}^1 . \end{aligned}$$

Für die Lösungsdarstellung selbst kann die Borel- Pompeiu- Formel aus Satz 2.3.7 genutzt werden. Man beachte, dass $u(r) = (0, 0)^T$ für alle $r \in \gamma_h^-$ gilt ■

Gezeigt wird im folgenden, dass die Lösung des diskreten Lamésystems gegen die Lösung des diskreten Stokesproblems konvergiert. Dazu wird die Lösung des diskreten Stokesproblems (siehe Beginn des Abschnittes 3.3.1) mit $u_s(m)$ bezeichnet. Mit Hilfe von Lemma 3.3.2 gilt

$$D_{h,M}^2 (u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)) = -(Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) - \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m)$$

und auf Grund der Eigenschaft $D_{h,M}^1 (T_{h,M}^1 f)(m) = f(m)$ und Lemma 2.4.1 folgt $(T_{h,M}^1 f)(m) \in \text{im } Q_h^+$ und somit

$$-(Q_{h,M}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m) = -(Q_{h,M}^+ M_x Q_h^+ (T_{h,M}^1 f))(m) .$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.17) erhält man

$$\begin{aligned} & D_{h,M}^2 (u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)) \\ &= \frac{\mu}{\varrho} Q_{h,M}^+ M_x D_{h,M}^2 u_s(m) - \frac{1}{\varrho} (Q_{h,M}^+ M_x Q_h^+ [0, p])(m) - \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m) . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Eigenschaft $D_h^{-1}u_0^s(m) + D_h^{-2}u_1^s(m) = 0$ der Lösung $u_s(m) = (u_0^s(m), u_1^s(m))^T$ des diskreten Stokesproblems ergibt sich

$$\begin{aligned} M_x D_{h,M}^2 u_s(m) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{m_p-2}{m_p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h^2 & -D_h^1 \\ D_h^{-1} & D_h^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^s(m) \\ u_1^s(m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_h^2 u_0^s(m) - D_h^1 u_1^s(m) \\ 0 \end{pmatrix} = D_{h,M}^2 u_s(m). \end{aligned}$$

Auf Grund der orthogonalen Zerlegung des Raumes l_2 , bildet der Orthoprojektor Q_{hM}^+ von l_2 nach $M_x D_{h,M}^2(w_2^1(G_h))$ ab. Dadurch gilt

$$\begin{aligned} &D_{h,M}^2(u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)) \\ &= \frac{\mu}{\varrho} Q_{hM}^+ M_x D_{h,M}^2 u_s(m) - \frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x Q_h^+ [0, p])(m) - \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m) \\ &= \frac{\mu}{\varrho} M_x D_{h,M}^2 u_s(m) - \frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x Q_h^+ [0, p])(m) - \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m) \\ &= \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m) - \frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x Q_h^+ [0, p])(m) - \frac{\mu}{\varrho} D_{h,M}^2 u_s(m) \\ &= -\frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x Q_h^+ [0, p])(m) \\ &= -\frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x (0, p)^T)(m) + \frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x P_h^+ [0, p])(m) \\ &= -\frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x (0, p)^T)(m). \end{aligned}$$

Die Gültigkeit des letzten Gleichheitszeichens ist auf die Beziehung

$$(Q_{hM}^+ M_x P_h^+ [0, p])(m) = (M_x P_h^+ [0, p])(m) - (P_{hM}^+ M_x P_h^+ [0, p])(m) = 0$$

zurückzuführen.

Im folgenden wird schließlich die Differenz $u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)$ in der Norm des Raumes $w_2^1(G_h)$ nach oben abgeschätzt. Diese Sobolevnorm wird genau wie im Abschnitt 2.4 definiert durch

$$\|v\|_{w_2^1(G_h)} = \|v\|_{l_2(G_h)} + \left(\sum_{i=1}^2 [\|D_h^{-i} v_0\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2 + \|D_h^{-i} v_1\|_{l_2(G_h \cup \gamma_{h3}^- \cup \gamma_{h4}^-)}^2] \right)^{1/2}.$$

Lemma 3.3.3 *Es gilt*

$$\|u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)\|_{w_2^1(G_h)} \leq \frac{1}{\varrho} \left(C_3^{1/2} + 1 \right) \frac{1}{2} \frac{m_p-2}{m_p-1} \|p\|_{l_2(G_h)},$$

wobei die Konstante C_3 mit dem kleinsten Eigenwert des diskreten Laplaceoperators zusammenhängt.

Beweis: Indem man auf die Differenz

$$D_{h,M}^2(u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)) = -\frac{1}{\varrho} (Q_{hM}^+ M_x(0, p)^T)(m)$$

die Borel- Pompeiu- Formel aus Satz 2.3.7 anwendet (man beachte $u(r) = (0, 0)^T$ für alle $r \in \gamma_h^-$), erhält man

$$T_{h,M}^2(D_{h,M}^2(u - \frac{\mu}{\varrho} u_s))(m) = u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m) = -\frac{1}{\varrho} (T_{h,M}^2 Q_{hM}^+ M_x(0, p)^T)(m).$$

Auf Grund der in Lemma 2.4.4 bewiesenen Beschränktheit des Operators $T_{h,M}^2$ gelangt man unter Verwendung der Operatornorm

$$\|T_{h,M}^2\|_{[l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+, w_2^1(G_h)]} = \sup_{u \in l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+} \frac{\|T_{h,M}^2 u\|_{w_2^1(G_h)}}{\|u\|_{l_2(G_h)}}$$

zur Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)\|_{w_2^1(G_h)} &= \frac{1}{\varrho} \|(T_{h,M}^2 Q_{hM}^+ M_x(0, p)^T)(m)\|_{w_2^1(G_h)} \\ &\leq \frac{1}{\varrho} \|T_{h,M}^2\|_{[l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+, w_2^1(G_h)]} \|Q_{hM}^+\|_{[M_x l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+]} \|M_x(0, p)^T\|_{l_2(G_h)} \\ &\leq \frac{1}{\varrho} (C_3^{1/2} + 1) \|Q_{hM}^+\|_{[M_x l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+]} \|M_x(0, p)^T\|_{l_2(G_h)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei C_3 im Zusammenhang mit dem kleinsten Eigenwert des diskreten Laplaceoperators steht. Gezeigt wird nun, dass der Orthoprojektor Q_{hM}^+ die Eigenschaft

$$\|Q_{hM}^+\|_{[M_x l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+]} = 1$$

besitzt. Dazu wird die Norm im Raum $l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+$ durch

$$\|Q_{hM}^+ \tilde{u}\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+}^2 = \sum_{mh \in G_h} h^2 (M_x^{-1} Q_{hM}^+ \tilde{u})^T (M_x^{-1} Q_{hM}^+ \tilde{u}) = \langle M_x^{-1} Q_{hM}^+ \tilde{u}, M_x^{-1} Q_{hM}^+ \tilde{u} \rangle$$

definiert. Für den Quotienten

$$\frac{\|Q_{hM}^+ M_x u\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+}^2}{\|M_x u\|_{M_x l_2(G_h)}^2}$$

gilt unter Beachtung der Abbildungseigenschaft $Q_{hM}^+ M_x u = M_x D_{h,M}^2 w$ des Orthoprojektors Q_{hM}^+ und Lemma 2.4.2

$$\begin{aligned} &\frac{\|Q_{hM}^+ M_x u\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+}^2}{\|M_x u\|_{M_x l_2(G_h)}^2} = \frac{\|M_x D_{h,M}^2 w\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+}^2}{\|M_x u\|_{M_x l_2(G_h)}^2} \\ &= \frac{\langle M_x^{-1} M_x D_{h,M}^2 w, M_x^{-1} M_x D_{h,M}^2 w \rangle}{\langle M_x^{-1} M_x u, M_x^{-1} M_x u \rangle} = \frac{\langle D_{h,M}^2 w, D_{h,M}^2 w \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{-\langle w, I_2 \Delta_h w \rangle}{\langle u, u \rangle}. \end{aligned}$$

Betrachtet wird zunächst das Skalarprodukt im Zähler. Aus

$$\begin{aligned} I_2 \Delta_h w &= D_{h,M}^1 M_x^{-1} M_x D_{h,M}^2 w = D_{h,M}^1 M_x^{-1} Q_{hM}^+ M_x u \\ &= D_{h,M}^1 M_x^{-1} M_x u - D_{h,M}^1 M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u = D_{h,M}^1 u \end{aligned}$$

und

$$w = T_{h,M}^2 M_x^{-1} M_x D_{h,M}^2 w = T_{h,M}^2 M_x^{-1} Q_{hM}^+ M_x u$$

folgt

$$\begin{aligned} &- < w, I_2 \Delta_h w > \\ &= - < D_{h,M}^1 u, T_{h,M}^2 M_x^{-1} Q_{hM}^+ M_x u > = < u, D_{h,M}^2 T_{h,M}^2 M_x^{-1} Q_{hM}^+ M_x u > \\ &= < u, M_x^{-1} Q_{hM}^+ M_x u > = < u, u > - < u, M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u > . \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass $< u, M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u > = 0$ gilt. Dazu nutzt man die Eigenschaft des Orthoprojektors P_{hM}^+ und erhält

$$\begin{aligned} < u, M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u > &= < D_{h,M}^2 T_{h,M}^2 u, M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u > \\ &= - < T_{h,M}^2 u, D_{h,M}^1 M_x^{-1} P_{hM}^+ M_x u > = 0 . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für die Operatornorm des Orthoprojektors Q_{hM}^+

$$\begin{aligned} \|Q_{hM}^+\|_{[M_x l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+]}^2 &= \sup_{M_x u \in M_x l_2(G_h)} \frac{\|Q_{hM}^+ M_x u\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_{hM}^+}^2}{\|M_x u\|_{M_x l_2(G_h)}^2} \\ &= \sup_{M_x u \in M_x l_2(G_h)} \frac{< u, u >}{< u, u >} = 1 \end{aligned}$$

und aus Abschätzung (3.24) folgt

$$\begin{aligned} &\|u(m) - \frac{\mu}{\varrho} u_s(m)\|_{w_2^1(G_h)} \leq \frac{1}{\varrho} (C_3^{1/2} + 1) \|M_x(0, p)^T\|_{l_2(G_h)} \\ &= \frac{1}{\varrho} (C_3^{1/2} + 1) \left(\sum_{m \in G_h} h^2 \left| \frac{1}{2} \frac{m_p - 2}{m_p - 1} p \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\varrho} (C_3^{1/2} + 1) \frac{1}{2} \frac{m_p - 2}{m_p - 1} \|p\|_{l_2(G_h)} \end{aligned}$$

unter Verwendung der Matrixnorm aus dem Abschnitt 2.2.4 ■

Die durch Lemma 3.3.3 erzielte Abschätzung ist noch nicht zufriedenstellend, da auf Grund von (3.17) der Druck p auf der rechten Seite mit der Lösung $u_s(m)$ zusammenhängt. Betrachtet man jedoch die Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} &-\frac{\mu}{\varrho} I_2 \Delta_h u_s(m) + \frac{1}{\varrho} [\text{grad}_h^+ p](m) = f(m) \\ &-I_2 \Delta_h u(m) - \frac{m_p}{m_p - 2} D_{h,M}^1 M_x^* D_{h,M}^2 u(m) = f(m), \end{aligned}$$

so besteht ein direkter Zusammenhang zwischen $\text{grad}_h^+ p$ und dem Verschiebungsvektor $u(m)$ aus dem Lamésystem. Außerdem gilt nach Lemma 3.3.2

$$u(m) = -(T_{h,M}^2 Q_{hM}^+ M_x (T_{h,M}^1 f))(m).$$

Folglich existiert auch ein Zusammenhang zwischen p und f , der unabhängig von $u_s(m)$ ist. Ohne die Schritte im Detail auszuführen, kann die Norm $\|p\|_{l_2(G_h)}$ durch eine Norm, die nur von der rechten Seite $f(m)$ abhängt, ausgedrückt werden. Durch die Kombination

$$\frac{m_p}{m_p - 2} M_x^* Q_{hM}^+ M_x (T_{h,M}^1 f)$$

steht die Differenz $m_p - 2$ nicht länger im Nenner. Dies berechtigt zur folgenden Aussage:

Folgerung 3.3.1 Für $m_p > 2$ und $m_p \rightarrow 2$ gilt $\|u(m) - \frac{p}{\rho} u_s(m)\|_{w_2^1(G_h)} \rightarrow 0$.

Diese Folgerung resultiert unmittelbar aus der Abschätzung in Lemma 3.3.3 und den sich anschließenden Bemerkungen.

In Analogie zum kontinuierlichen Fall kann dieses Resultat verwendet werden, um die Lösung des Stokesproblems mit Hilfe der Lösung des Lamésystems zu beschreiben.

3.3.3 Die biharmonische Gleichung als Grundlage für den weiteren Ausbau der Theorie

Der Hauptschwerpunkt der Untersuchungen in diesem Abschnitt beruht nicht nur auf der biharmonischen Gleichung selbst, sondern auch auf der bekannten Tatsache, dass die Lösung der elastischen Grundgleichungen eines homogenen isotropen Materials im ebenen Spannungs- und Verschiebungszustand äquivalent auf die Lösung der biharmonischen Gleichung zurückgeführt werden kann. Im Übersichtsartikel von Meleshko [Mel] findet man dazu einen historischen Überblick. Der Satz 3.3.5 stellt die Verbindung zwischen der linearen Elastizitätstheorie einerseits und der komplexen Funktionentheorie andererseits dar. Er zeigt, dass die Lösung der biharmonischen Gleichung mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen dargestellt werden kann. Auf der Grundlage dieser diskret holomorphen Funktionen werden Lösungsdarstellungen für die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie erzielt. Dabei spielen die Polynome aus dem Abschnitt 2.6.1 mit ihren Eigenschaften eine zentrale Rolle. Diese Herangehensweise ist besonders auf dem Gebiet der Bruchmechanik sehr bedeutsam, da hier Spannungs- und Verschiebungsfelder in der Nähe von Singularitäten zu berechnen sind, die durch Risse und Kerben hervorgerufen werden. Aufbauend auf den Resultaten, die hier vorgestellt werden, erscheint eine Summendarstellung der

diskret holomorphen Funktionen als geeignet, um die Ordnung der Singularität zu erfassen. Dadurch können wichtige bruchmechanische Kenngrößen berechnet werden. Die hier beschriebene Methode, die sogenannte Theorie der komplexen Spannungsfunktionen, geht zurück auf die Autoren Kolosov [Kol1, Kol2] und Muskhelishvili [Mus]. Zur entsprechenden Vorgehensweise in der klassischen Theorie findet man in [BG] grundlegende Aussagen.

Betrachtet wird die Differenzengleichung

$$\Delta_h \Delta_h u(m) = 0 \quad \forall m = (m_1, m_2) \in G_h.$$

Die Lösung dieser Gleichung kann in einem aus Rechtecken zusammengesetzten Gebiet, parallel zu den Achsen, mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen

$$\varphi_h(m) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_h(m) = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

(in Bezug auf den Operator D^{1h}) dargestellt werden. Die konkrete Vorgehensweise wird mit Hilfe des folgenden Satzes erläutert, der eine diskrete Version des Satzes von Goursat [Gor] darstellt. Dieser Satz wurde bereits in [Ho2] publiziert.

Satz 3.3.5 *Für die reell-wertige Lösung $u(m)$ der biharmonischen Gleichung $\Delta_h \Delta_h u(m) = 0$ gilt*

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} m_1 h & m_2 h \\ -m_2 h & m_1 h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 h & -m_2 h \\ m_2 h & m_1 h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 - A \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 - A \\ -q_1 \end{pmatrix} \right).$$

A ist dabei Lösung der diskreten Poissongleichung $\Delta_h A = -h D_h^1 D_h^{-1} p - h D_h^2 D_h^{-2} q$.

Die Aussage des Satzes zeigt eindrucksvoll die Analogie zwischen der diskreten und der klassischen Darstellung

$$u(z) = \frac{1}{2} \left(\bar{z} \varphi(z) + z \overline{\varphi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)} \right)$$

mit den holomorphen Funktionen ϕ und ψ .

Die Lösung einer Poissongleichung $-\Delta_h u(m) = f(m)$ kann mit Hilfe des Volumenpotentials

$$V_h(m) = \sum_{m \in G_h} E_h^{\Delta_h}(m-l) f_h(m) h^2$$

konstruiert werden, wobei $E_h^{\Delta_h}(m)$ die diskrete Fundamentallösung des Laplaceoperators ist (siehe [Ho]). Ferner kann gezeigt werden, dass die Operatoren V_h :

$c(G_h) \rightarrow c(G_h)$ und $V_h : l_p(G_h) \rightarrow c(G_h)$ mit $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für alle $h \leq e^{-1}$ gleichmäßig beschränkt sind. Dabei ist $c(G_h)$ der Teilraum der konvergenten Folgen aus der Menge der beschränkten Funktionen und $l_p(G_h)$ ist der unendlichdimensionale Folgenraum entsprechend der Bezeichnung von Riesz.

Beweis von Satz 3.3.5: Zunächst sei u Lösung der biharmonischen Gleichung $\Delta_h \Delta_h u = 0$. Gezeigt wird, dass mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen $\varphi_h(m)$ und $\psi_h(m)$ die im Theorem 3.3.5 angegebene Lösungsdarstellung möglich ist.

Setzt man $P = \Delta_h u$, dann ist P auf Grund der Eigenschaft $\Delta_h P = \Delta_h \Delta_h u = 0$ diskret harmonisch. Gesucht wird nun nach einer zu P konjugiert harmonischen Funktion Q mit der Eigenschaft

$$D^{1h} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

In Analogie zu den Methoden der komplexen Analysis, wo Q mit Hilfe eines Kurvenintegrals konstruiert wird, ist im diskreten Fall nach einer Summe zu suchen, die das Kurvenintegral approximiert. Dazu werden die Aussagen aus dem Abschnitt 2.5. verwendet. Die Funktion Q kann konstruiert werden durch

$$Q(m_1, m_2) = Q(a_1, a_2) - h \sum_{i=a_1}^{m_1-1} D_h^{-2} P(i, a_2) + h \sum_{j=a_2}^{m_2-1} D_h^{-1} P(m_1, j),$$

wobei Q nur eindeutig bis auf eine Konstante ist.

Unter Verwendung der Konstruktionsvorschrift für Q und der Eigenschaft $\Delta_h P = 0$ weist man leicht nach, dass $\Delta_h Q = 0$ gilt. Auch die Gültigkeit der Eigenschaft (3.25) kann unter Einbeziehung der konstruierten Funktion Q überprüft werden.

Nun wird nach Funktionen p und q gesucht, so dass

$$D^{1h} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D^{2h} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Funktionen p und q mit diesen Eigenschaften sind diskret harmonisch und werden üblicherweise diskret holomorphe Primitive von (P, Q) genannt. Der sich als äußerst hilfreich erweisende Zusammenhang zwischen diskret holomorphen und diskret harmonischen Funktionen wird an dieser Stelle besonders deutlich. Aus

$$D^{1h} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + D^{2h} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

folgt zunächst

$$(D_h^1 + D_h^{-1})p = \frac{1}{2}P \quad \text{sowie} \quad (D_h^1 + D_h^{-1})q = \frac{1}{2}Q.$$

Beide Gleichungen werden zur Konstruktion von p genutzt. Unter der Voraussetzung, dass $p(a_1, a_2)$ und $p(a_1 + 1, a_2)$ sowie $p(a_1, a_2 + 1)$ vorgegeben sind, berechnet man $p(a_1 + 1, a_2 + 1)$ unter Verwendung der Beziehung

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2}Q(a_1 + 1, a_2 + 1) \\
&= hD_h^1q(a_1 + 1, a_2 + 1) + hD_h^{-1}q(a_1 + 1, a_2 + 1) \\
&= hD_h^1q(a_1 + 1, a_2 + 1) + hD_h^1q(a_1, a_2 + 1) \\
&= -hD_h^{-2}p(a_1 + 1, a_2 + 1) - hD_h^{-2}p(a_1, a_2 + 1) \\
&= -p(a_1 + 1, a_2 + 1) + p(a_1 + 1, a_2) \\
&\quad -p(a_1, a_2 + 1) + p(a_1, a_2).
\end{aligned}$$

Auf der Grundlage aller vier Werte für p berechnet man

$$p(a_1 + k, a_2 + l) = \frac{h}{2}P(a_1 + k - 1, a_2 + l) + p(a_1 + k - 2, a_2 + l) \quad (3.26)$$

für $l = 0$ und $l = 1$ und alle $k = 2, 3, \dots$

In allen Fällen $l > 1$ können nun die Differenzengleichungen $\Delta_h p = 0$ und $\Delta_h P = 0$ anstelle von fest vorgegebenen Werten genutzt werden. Mittels vollständiger Induktion kann bewiesen werden, dass die Rekursionsformel (3.26) auch in diesen Fällen gültig ist. Die diskret harmonische Funktion q wird wieder mit Hilfe des diskreten Kurvenintegrals

$$q(m_1, m_2) = q(a_1, a_2) - h \sum_{i=a_1}^{m_1-1} D_h^{-2}p(i, a_2) + h \sum_{j=a_2}^{m_2-1} D_h^{-1}p(m_1, j)$$

konstruiert. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass p und q die gewünschten Eigenschaften besitzen.

Im nächsten Beweisschritt setzt man entsprechend der Aussage des Satzes

$$p_1 = u - p \cdot m_1 h - q \cdot m_2 h + A \quad \text{mit} \quad \Delta_h A = -hD_h^1 D_h^{-1} p - hD_h^2 D_h^{-2} q.$$

Dadurch gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_h p_1 &= \Delta_h u - \Delta_h(p \cdot m_1 h + q \cdot m_2 h) + \Delta_h A \\
&= \Delta_h u - \Delta_h(p \cdot m_1 h + q \cdot m_2 h) - hD_h^1 D_h^{-1} p - hD_h^2 D_h^{-2} q \\
&= \Delta_h u - D_h^1 D_h^{-1}(p \cdot (m_1 + 1)h + q \cdot m_2 h) \\
&\quad - D_h^2 D_h^{-2}(p \cdot m_1 h + q \cdot (m_2 + 1)h) \\
&= \Delta_h u - \Delta_h p \cdot m_1 h - 2D_h^1 p - \Delta_h q \cdot m_2 h - 2D_h^2 q \\
&= \Delta_h u - P = 0.
\end{aligned}$$

Die konjugiert harmonische Funktion q_1 wird auch hier mit Hilfe des diskreten Kurvenintegrals erzeugt. Abschließend sei vermerkt, dass analog zum kontinuierlichen Fall die Darstellung nicht eindeutig ist.

Sind nun umgekehrt zwei beliebige diskret holomorphe Funktionen $\varphi_h(m)$ und $\psi_h(m)$ gegeben, dann gilt nach den letzten Berechnungen und der Tatsache, dass die Komponenten von φ_h und ψ_h diskret harmonisch sind

$$\Delta_h u = \Delta_h p_1 + \Delta_h p \cdot m_1 h + \Delta_h q \cdot m_2 h + 2D_h^1 p + 2D_h^2 q = 2D_h^1 p + 2D_h^2 q.$$

Aus dieser Beziehung folgt schließlich die Eigenschaft

$$\Delta_h \Delta_h u = 2D_h^1 \Delta_h p + 2D_h^2 \Delta_h q = 0 \quad \blacksquare$$

Auf der Grundlage des hier bewiesenen Satzes wird nun eine Verbindung zwischen Gleichungen aus der linearen Elastizitätstheorie und Methoden aus der komplexen Funktionentheorie herstellt.

Ausgangspunkt der Überlegungen sind die beiden Differenzengleichungen für die Verschiebungen

$$\begin{aligned} \mu \Delta_h u_0 + (\lambda + \mu) D_h^{-1} e &= 0 \\ \mu \Delta_h u_1 + (\lambda + \mu) D_h^{-2} e &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Vektorkomponenten der äußeren Kraft sind Null gesetzt und u_0 und u_1 bilden die Vektorkomponenten des Verschiebungsvektors u . Darüber hinaus gilt

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$$\text{so dass} \quad \lambda + \mu = \frac{E(1 - 2\nu) + 2E\nu}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{G}{1 - 2\nu}$$

und $e = D_h^1 u_0 + D_h^2 u_1$. Konkret bezeichnet E den Elastizitätsmodul, ν die Querdehnzahl und G den Schubmodul. Man beachte, dass der Unterschied zum Differenzenrandwertproblem am Anfang des Abschnittes 3.3.2 in der Vertauschung von Vorwärts- und Rückwärtsableitungen besteht.

Zur Lösungsdarstellung für das System (3.27) wird der Ansatz

$$\begin{aligned} 2Gu_0 &= -D_h^{-1}\Theta + 2\alpha\Phi_1 \\ 2Gu_1 &= -D_h^{-2}\Theta + 2\alpha\Phi_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

nach Papkovic-Neuber [Pap],[Neu] mit der ebenen Spannungsfunktion Θ , der Materialkonstante α und den diskret harmonischen Funktionen Φ_1 und Φ_2 genutzt. Durch Einsetzen von (3.28) in (3.27) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu \Delta_h \left(-\frac{1}{2G} D_h^{-1}\Theta + \frac{2\alpha}{2G} \Phi_1 \right) + \frac{G}{(1 - 2\nu)} D_h^{-1} e &= 0 \\ \mu \Delta_h \left(-\frac{1}{2G} D_h^{-2}\Theta + \frac{2\alpha}{2G} \Phi_2 \right) + \frac{G}{(1 - 2\nu)} D_h^{-2} e &= 0. \end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}D_h^{-1}\Delta_h\Theta + \alpha\Delta_h\Phi_1 + \frac{G}{(1-2\nu)}D_h^{-1}e &= 0 \\ -\frac{1}{2}D_h^{-2}\Delta_h\Theta + \alpha\Delta_h\Phi_2 + \frac{G}{(1-2\nu)}D_h^{-2}e &= 0. \end{aligned}$$

Da Φ_1 und Φ_2 diskret harmonische Funktionen sind, vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned} D_h^{-1}\left(\frac{2G}{(1-2\nu)}e - \Delta_h\Theta\right) &= 0 \\ D_h^{-2}\left(\frac{2G}{(1-2\nu)}e - \Delta_h\Theta\right) &= 0. \end{aligned}$$

Der Term in der Klammer ist unabhängig von den Koordinaten. Folglich gilt

$$2Ge - (1-2\nu)\Delta_h\Theta = \text{konstant}.$$

In der linearen Elastizitätstheorie wird diese Konstante vernachlässigt, so dass

$$2Ge = (1-2\nu)\Delta_h\Theta \quad \text{gilt.} \quad (3.29)$$

Andererseits folgt aus $e = D_h^1u_0 + D_h^2u_1$ und (3.28)

$$2Ge = -D_h^1D_h^{-1}\Theta + 2\alpha D_h^1\Phi_1 - D_h^2D_h^{-2}\Theta + 2\alpha D_h^2\Phi_2,$$

also

$$2Ge = -\Delta_h\Theta + 2\alpha(D_h^1\Phi_1 + D_h^2\Phi_2). \quad (3.30)$$

Durch Gleichsetzen von (3.29) und (3.30) erhält man

$$(1-2\nu)\Delta_h\Theta = -\Delta_h\Theta + 2\alpha(D_h^1\Phi_1 + D_h^2\Phi_2)$$

und somit

$$2(1-\nu)\Delta_h\Theta = 2\alpha(D_h^1\Phi_1 + D_h^2\Phi_2). \quad (3.31)$$

Folglich setzt sich die Lösung Θ aus einem Anteil $\Phi_0 \in \ker\Delta_h$ und einem zu Gleichung (3.31) passenden inhomogenen Anteil zusammen. Aus diesen Überlegungen heraus kann die diskrete Spannungsfunktion in der Form

$$\Theta = \Phi_0 + \Phi_1 \cdot m_1 h + \Phi_2 \cdot m_2 h - A_1$$

mit $\Delta_h\Phi_0 = \Delta_h\Phi_1 = \Delta_h\Phi_2 = 0$ und $\Delta_h A_1 = -hD_h^1D_h^{-1}\Phi_1 - hD_h^2D_h^{-2}\Phi_2$ geschrieben werden und man erhält die Eigenschaft $\Delta_h\Theta = 2(D_h^1\Phi_1 + D_h^2\Phi_2)$ auf Grund

der Berechnungen

$$\begin{aligned}
\Delta_h \Theta &= \Delta_h \Phi_0 + \Delta_h(\Phi_1 \cdot m_1 h + \Phi_2 \cdot m_2 h) - \Delta_h A_1 \\
&= \Delta_h(\Phi_1 \cdot m_1 h + \Phi_2 \cdot m_2 h) + h D_h^1 D_h^{-1} \Phi_1 + h D_h^2 D_h^{-2} \Phi_2 \\
&= D_h^1 D_h^{-1}(\Phi_1 \cdot (m_1 + 1)h + \Phi_2 \cdot m_2 h) + D_h^2 D_h^{-2}(\Phi_1 \cdot m_1 h + \Phi_2 \cdot (m_2 + 1)h) \\
&= D_h^1 h^{-1}[\Phi_1(m_1, m_2) \cdot (m_1 + 1)h + \Phi_2(m_1, m_2) \cdot m_2 h \\
&\quad - \Phi_1(m_1 - 1, m_2) \cdot m_1 h - \Phi_2(m_1 - 1, m_2) \cdot m_2 h] \\
&\quad + D_h^2 h^{-1}[\Phi_1(m_1, m_2) \cdot m_1 h + \Phi_2(m_1, m_2) \cdot (m_2 + 1)h \\
&\quad - \Phi_1(m_1, m_2 - 1) \cdot m_1 h - \Phi_2(m_1, m_2 - 1) \cdot m_2 h] \\
&= h^{-2}[\Phi_1(m_1 + 1, m_2) \cdot (m_1 + 2)h + \Phi_2(m_1 + 1, m_2) \cdot m_2 h \\
&\quad - 2\Phi_1(m_1, m_2) \cdot (m_1 + 1)h - 2\Phi_2(m_1, m_2) \cdot m_2 h \\
&\quad + \Phi_1(m_1 - 1, m_2) \cdot m_1 h + \Phi_2(m_1 - 1, m_2) \cdot m_2 h \\
&\quad + \Phi_1(m_1, m_2 + 1) \cdot m_1 h + \Phi_2(m_1, m_2 + 1) \cdot (m_2 + 2)h \\
&\quad - 2\Phi_1(m_1, m_2) \cdot m_1 h - 2\Phi_2(m_1, m_2) \cdot (m_2 + 1)h \\
&\quad + \Phi_1(m_1, m_2 - 1) \cdot m_1 h + \Phi_2(m_1, m_2 - 1) \cdot m_2 h] \\
&= D_h^1 D_h^{-1} \Phi_1 \cdot m_1 h + 2h^{-1}[\Phi_1(m_1 + 1, m_2) - \Phi_1(m_1, m_2)] \\
&\quad + D_h^1 D_h^{-1} \Phi_2 \cdot m_2 h + D_h^2 D_h^{-2} \Phi_1 \cdot m_1 h \\
&\quad + D_h^2 D_h^{-2} \Phi_2 \cdot m_2 h + 2h^{-1}[\Phi_2(m_1, m_2 + 1) - \Phi_2(m_1, m_2)] \\
&= \Delta_h \Phi_1 \cdot m_1 h + \Delta_h \Phi_2 \cdot m_2 h + 2D_h^1 \Phi_1 + 2D_h^2 \Phi_2 \\
&= 2(D_h^1 \Phi_1 + D_h^2 \Phi_2).
\end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung und Gleichung (3.31) folgt für die Materialkonstante α

$$\alpha = 2(1 - \nu).$$

Schließlich resultiert aus (3.31) $\Delta_h \Delta_h \Theta = 2D_h^1 \Delta_h \Phi_1 + 2D_h^2 \Delta_h \Phi_2 = 0$, die wichtige Eigenschaft der Spannungsfunktion Θ .

Somit hat einerseits die Lösung u der biharmonischen Gleichung nach Satz 3.3.5 die Darstellung

$$u = p \cdot m_1 h + q \cdot m_2 h + p_1 - A$$

mit $\Delta_h A = -h D_h^1 D_h^{-1} p - h D_h^2 D_h^{-2} q$ und den diskret harmonischen Funktionen p, q und p_1 . Andererseits hat auch die diskrete Spannungsfunktion Θ die Form

$$\Theta = \Phi_0 + \Phi_1 \cdot m_1 h + \Phi_2 \cdot m_2 h - A_1$$

mit $\Delta_h A_1 = -h D_h^1 D_h^{-1} \Phi_1 - h D_h^2 D_h^{-2} \Phi_2$ und den diskret harmonischen Funktionen Φ_0, Φ_1 und Φ_2 . Nach der diskreten Version des Satzes von Goursat ist daher sichergestellt, dass die Komponenten des Verschiebungsvektors mit Hilfe zweier diskret holomorpher Funktionen dargestellt werden können. Ausgehend von den Gleichungen

(3.28) gilt konkret

$$\begin{aligned} 2Gu_0 &= -(D_h^{-1}\Phi_0 + D_h^{-1}(\Phi_1 \cdot m_1 h) + D_h^{-1}(\Phi_2 \cdot m_2 h) - D_h^{-1}A_1) + 2\alpha \Phi_1 \\ &= -(D_h^{-1}\Phi_0 + D_h^{-1}\Phi_1 \cdot m_1 h + D_h^{-1}\Phi_2 \cdot m_2 h - D_h^{-1}A_1) \\ &\quad + 2\alpha \Phi_1(m_1 h, m_2 h) - \Phi_1((m_1 - 1)h, m_2 h) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2Gu_1 &= -(D_h^{-2}\Phi_0 + D_h^{-2}(\Phi_1 \cdot m_1 h) + D_h^{-2}(\Phi_2 \cdot m_2 h) - D_h^{-2}A_1) + 2\alpha \Phi_2 \\ &= -(D_h^{-2}\Phi_0 + D_h^{-2}\Phi_1 \cdot m_1 h + D_h^{-2}\Phi_2 \cdot m_2 h - D_h^{-2}A_1) \\ &\quad + 2\alpha \Phi_2(m_1 h, m_2 h) - \Phi_2(m_1 h, (m_2 - 1)h). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sollen in Anlehnung an die klassische Theorie *Kolosov Muskhelishvili Gleichungen für die Verschiebungen* genannt werden.

Um nun die Komponenten des Verschiebungsvektors in den Lamégleichungen berechnen zu können, werden die harmonische Funktion Φ_0 , das Paar (Φ_1, Φ_2) der diskret holomorphen Funktionen und die Lösung A_1 der diskreten Poissonsgleichung benötigt. Zur Vereinfachung soll zunächst Φ_0 konstant gewählt werden. Für das Paar (Φ_1, Φ_2) der diskret holomorphen Funktionen eignen sich die im Abschnitt 2.6.1 eingeführten Polynome. Konkret sei

$$\Phi_1 = P_0^n(m_1, m_2) \quad \text{und} \quad \Phi_2 = P_1^n(m_1 - 1, m_2).$$

Die Lösung der diskreten Poissonsgleichung kann, wie bereits im Anschluß an den Satz 3.3.5 beschrieben, mit Hilfe des Volumenpotentials konstruiert werden. Damit erhält man für jeden Polynomgrad n eine Lösung der Gleichungen (3.27). Man beachte, dass für die Materialkonstante $\alpha = 2(1 - \nu)$ gilt.

Bisher wurden nur die Differenzengleichungen betrachtet und noch keine Randbedingungen zur Lösung der Probleme in beschränkten Gebieten berücksichtigt. Es erscheint jedoch sinnvoll, die erzielten Lösungen für u_0 und u_1 zu überlagern und mit unbekannten Koeffizienten zu versehen, um mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems sowohl die Bedingungen für u_0 als auch für u_1 auf dem Rand einzustellen. Im Unterschied zum kontinuierlichen Fall, wo mit Potenz- und Laurentreihenentwicklungen gearbeitet wird, sind hier auf Grund der endlichen Anzahl an Randgitterpunkten im beschränkten diskreten Gebiet nur endliche Summen zu bilden. Dies erweist sich als entscheidender Vorteil.

Hervorzuheben ist, dass die Überlegungen in diesem Abschnitt erst der Anfang für viele weitere theoretische und numerische Untersuchungen sind. Besonders interessant ist die Frage, wie sich die beschriebenen Summendarstellungen bei praktischen Problemen auf dem Gebiet der Bruchmechanik bewähren. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, auch Probleme im Außengebiet oder gekoppelte Probleme zu untersuchen.

Die numerische Umsetzung der bisher erzielten Resultate in Matlab erfolgt gerade im Rahmen eines Projektes. So entstehen Programme zur Berechnung der diskreten Polynome. Auch wird die diskrete Poissongleichung mit Hilfe des Volumenpotentials gelöst. Die aktuellen Berechnungen sollen verdeutlichen, dass die diskreten Kolosov Muskhelishvili Gleichungen für die Verschiebungen tatsächlich zu Lösungen der Lamégleichungen führen. Darüber hinaus wird an den linearen Gleichungssystemen zur Einstellung vorgegebener Randwerte gearbeitet. Dabei sind einige technische Schwierigkeiten zu meistern, um tatsächlich alle erforderlichen Randgitterpunkte zu erfassen.

3.3.4 Lösung der diskreten Schrödingergleichung mit einer Gleichung vom Riccatityp

Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Abschnitt ist die diskrete Schrödingergleichung

$$(-I_2 \Delta_h + u) f = 0$$

mit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$. Zur Faktorisierung des Laplaceoperators werden die Differenzenoperatoren D^{1h} und D^{2h} aus dem Abschnitt 2.2.2 genutzt.

Um die Lösung der Differenzengleichung beschreiben zu können, wird im folgenden Lemma eine Formel zur Differentiation eines Produktes von Funktionen bewiesen, die an die Überlegungen aus dem Abschnitt 3.2.1.4 anknüpft. Wie bei jeder Produktformel im Diskreten werden neben dem Gitterpunkt (m_1, m_2) auch die benachbarten Gitterpunkte in die Formel eingehen. Dieser Sachverhalt erschwert den Aufbau der diskreten Theorie. Da man das Problem der benachbarten Gitterpunkte nicht umgehen kann, stellt sich eigentlich nur die Frage, an welcher Stelle es die theoretischen Aussagen besonders übersichtlich erscheinen läßt. Dies trifft auf die nun folgende Gestalt der Produktformel zu. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird immer dann das Argument der Funktionen weggelassen, wenn es sich um den Gitterpunkt (m_1, m_2) handelt.

Lemma 3.3.4 *Für Funktionen $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ und $q(m) = (q_0(m), q_1(m))^T$ mit den Matrixdarstellungen*

$$\begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) \\ D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^2 & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^1 & -D_h^{-2} \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Beweis: Die Beweisschritte werden anhand des Matrixelementes in der linken oberen Ecke demonstriert. Alle Überlegungen können auf die restlichen drei Matrixelemente übertragen werden. Durch Einfügen von additiven Nullen erhält man

$$\begin{aligned}
&D_h^{-1}[q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) f_0 + q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) f_1] - D_h^2[-q_1 f_0 + q_0 f_1] \\
&= \frac{1}{h} [q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) f_0 - q_0(m_1, m_2 + 1) f_0(m_1 - 1, m_2) + q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) f_1 \\
&\quad - q_1(m_1, m_2 + 1) f_1(m_1 - 1, m_2) + q_1(m_1, m_2 + 1) f_0(m_1, m_2 + 1) - q_1 f_0 \\
&\quad - q_0(m_1, m_2 + 1) f_1(m_1, m_2 + 1) + q_0 f_1 + q_0(m_1, m_2 + 1) f_0 - q_0(m_1, m_2 + 1) f_0 \\
&\quad + q_1(m_1, m_2 + 1) f_1 - q_1(m_1, m_2 + 1) f_1 + q_1(m_1, m_2 + 1) f_0 - q_1(m_1, m_2 + 1) f_0 \\
&\quad + q_0(m_1, m_2 + 1) f_1 - q_0(m_1, m_2 + 1) f_1] \\
&= f_0 D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + q_0(m_1, m_2 + 1) D_h^{-1} f_0 + f_1 D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) \\
&\quad + q_1(m_1, m_2 + 1) D_h^{-1} f_1 + f_0 D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) + q_1(m_1, m_2 + 1) D_h^2 f_0 \\
&\quad - f_1 D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) - q_0(m_1, m_2 + 1) D_h^2 f_1.
\end{aligned}$$

Für die restlichen Matrixelemente gilt:

Element rechts oben

$$\begin{aligned}
&D_h^{-1}[-q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) f_1 + q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) f_0] - D_h^2[q_1 f_1 + q_0 f_0] \\
&= -f_1 D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) - q_0(m_1, m_2 + 1) D_h^{-1} f_1 + f_0 D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) \\
&\quad + q_1(m_1, m_2 + 1) D_h^{-1} f_0 - f_1 D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) - q_1(m_1, m_2 + 1) D_h^2 f_1 \\
&\quad - f_0 D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) - q_0(m_1, m_2 + 1) D_h^2 f_0
\end{aligned}$$

Element links unten

$$\begin{aligned}
&D_h^{-2}[q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) f_0 + q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) f_1] + D_h^1[-q_1 f_0 + q_0 f_1] \\
&= f_0 D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) + q_0(m_1 + 1, m_2) D_h^{-2} f_0 + f_1 D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) \\
&\quad + q_1(m_1 + 1, m_2) D_h^{-2} f_1 - f_0 D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) - q_1(m_1 + 1, m_2) D_h^1 f_0 \\
&\quad f_1 D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) + q_0(m_1 + 1, m_2) D_h^1 f_1
\end{aligned}$$

Element rechts unten

$$D_h^{-2}[-q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) f_1 + q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) f_0] + D_h^1[q_1 f_1 + q_0 f_0]$$

$$\begin{aligned}
&= -f_1 D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - q_0(m_1 + 1, m_2) D_h^{-2} f_1 + f_0 D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) \\
&\quad + q_1(m_1 + 1, m_2) D_h^{-2} f_0 + f_1 D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) + q_1(m_1 + 1, m_2) D_h^1 f_1 \\
&\quad + f_0 D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) + q_0(m_1 + 1, m_2) D_h^1 f_0
\end{aligned}$$

Werden die gewonnenen Ergebnisse wieder in Matrixform geschrieben, dann folgt die Behauptung des Lemmas ■

Bei allen weiteren Ausführungen interessiert nur folgender Spezialfall des Lemmas:

Folgerung 3.3.2 *Ist $f(m) = (f_0(m), f_1(m))^T$ eine Lösung der diskreten Vekua-gleichung*

$$\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_1 \\ -q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$$

entsprechend Formel 3.5 in Abschnitt 3.2.1.4, dann gelten auf Grund der Matrix-schreibweise

$$\begin{pmatrix} D_h^{-1} f_0 - D_h^2 f_1 & -D_h^{-1} f_1 - D_h^2 f_0 \\ D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1 & -D_h^{-2} f_1 + D_h^1 f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 f_0 + q_1 f_1 & q_0 f_1 + q_1 f_0 \\ -q_1 f_0 - q_0 f_1 & q_1 f_1 - q_0 f_0 \end{pmatrix}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned}
D_h^{-1} f_0 - D_h^2 f_1 &= -D_h^{-2} f_1 + D_h^1 f_0 \\
D_h^{-2} f_0 + D_h^1 f_1 &= D_h^{-1} f_1 + D_h^2 f_0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

und aus Lemma 3.3.4 folgt

$$\begin{aligned}
&D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) \\ D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) \\ D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} f \\
&\quad + \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} D^{1h} f.
\end{aligned}$$

Um den Zusammenhang zum diskreten Laplaceoperator herzustellen, wird im folgenden Lemma die Struktur von $D^{2h}f$ unter der Voraussetzung untersucht, dass f eine Lösung der diskreten Vekuagleichung ist.

Lemma 3.3.5 *Ist f eine Lösung der diskreten Vekuagleichung, dann gilt*

$$D^{2h}f = \begin{pmatrix} -q_0 & -q_1 \\ q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Auf Grund der Matrixdarstellung des Operators D^{2h} und der Gültigkeit der Beziehungen (3.32) erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D_h^1 f_0 + D_h^2 f_1 & -D_h^1 f_1 + D_h^2 f_0 \\ -D_h^{-2} f_0 + D_h^{-1} f_1 & D_h^{-2} f_1 + D_h^{-1} f_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_h^1 f_0 + D_h^2 f_1 & D_h^{-2} f_0 - D_h^{-1} f_1 \\ -D_h^{-2} f_0 + D_h^{-1} f_1 & D_h^1 f_0 + D_h^2 f_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (2.19) zeigt man, dass D^{2h} der zu $-D^{1h}$ adjungierte Operator ist, da gilt

$$\begin{aligned} \langle w, D^{2h}f \rangle &= \sum_{m \in G_h} h^2 [w_0 D_h^1 f_0 - w_1 D_h^{-2} f_0 + w_0 D_h^2 f_1 + w_1 D_h^{-1} f_1] \\ &= - \sum_{m \in G_h} h^2 [f_0 D_h^{-1} w_0 - f_0 D_h^2 w_1 + f_1 D_h^{-2} w_0 + f_1 D_h^1 w_1] = - \langle f, D^{1h}w \rangle. \end{aligned}$$

Da vorausgesetzt wurde, dass f eine Lösung der diskreten Vekuagleichung $D^{1h}f = -qf$ ist, wählt man auch für den adjungierten Operator einen linearen Ansatz in f_0 und f_1 , also

$$D^{2h}f = \begin{pmatrix} Af_0 + Bf_1 & -Cf_0 - Df_1 \\ Cf_0 + Df_1 & Af_0 + Bf_1 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden werden zwei Eigenschaften des Operators D^{2h} genutzt. Zunächst gilt $D^{1h}f + D^{2h}f = I_2 (D_h^1 + D_h^{-1})f$. Unter Beachtung der Vekuagleichung erhält man komponentenweise

$$\begin{aligned} -q_0 f_0 + q_1 f_1 + Af_0 + Bf_1 &= (D_h^1 + D_h^{-1})f_0 \quad \text{und} \\ -q_1 f_0 - q_0 f_1 + Cf_0 + Df_1 &= (D_h^1 + D_h^{-1})f_1. \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung hängt die rechte Seite nur von f_0 ab. Man wählt daher $B = -q_1$. Analog setzt man in der zweiten Gleichung $C = q_1$. Somit gilt

$$D^{2h}f = \begin{pmatrix} Af_0 - q_1 f_1 & -q_1 f_0 - Df_1 \\ q_1 f_0 + Df_1 & Af_0 - q_1 f_1 \end{pmatrix}.$$

Die zweite wichtige Eigenschaft des Operators D^{2h} ist $D^{1h} D^{2h} f = D^{2h} D^{1h} f = I_2 \Delta_h f$. Aus

$$D^{2h} \begin{pmatrix} -q_0 f_0 + q_1 f_1 & q_0 f_1 + q_1 f_0 \\ -q_1 f_0 - q_0 f_1 & q_1 f_1 - q_0 f_0 \end{pmatrix} = I_2 \Delta_h f$$

folgt komponentenweise

$$\begin{aligned} A(-q_0 f_0 + q_1 f_1) - q_1(-q_1 f_0 - q_0 f_1) &= \Delta_h f_0 \quad \text{und} \\ q_1(-q_0 f_0 + q_1 f_1) + D(-q_1 f_0 - q_0 f_1) &= \Delta_h f_1. \end{aligned}$$

Auch hier setzt man auf Grund des Koeffizientenvergleiches $A = -q_0$ und $D = -q_0$. Dadurch gilt

$$D^{2h} f = \begin{pmatrix} -q_0 f_0 - q_1 f_1 & -q_1 f_0 + q_0 f_1 \\ q_1 f_0 - q_0 f_1 & -q_0 f_0 - q_1 f_1 \end{pmatrix}$$

und die Behauptung des Lemmas ist bewiesen ■

Mit Hilfe von Folgerung 3.3.2 und Lemma 3.3.5 wird fast der Übergang zum Laplaceoperator geschafft. Zu bewältigen ist nur noch das bereits angesprochene Problem der benachbarten Gitterpunkte in den Matrixelementen $q_0(m_1 + 1, m_2 + 1)$ und $q_1(m_1 + 1, m_2 + 1)$. Dazu wird die folgende Schreibweise genutzt:

$$\begin{aligned} & D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ & + D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_0 & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ & = -D^{1h} D^{2h} f \\ & + D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_0 & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ & = \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) \\ D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} f \\ & + \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} D^{1h} f. \end{aligned}$$

Ziel der weiteren Ausführungen ist es, den Korrekturterm

$$D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_0 & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right]$$

auf der anderen Seite der Gleichung geschickt unterzubringen. Demonstriert wird auch hier die Vorgehensweise anhand des Matrixelementes in der linken oberen Ecke. Durch mehrmaliges Einfügen von additiven Nullen erhält man

$$D_h^{-1}[f_0 q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_0 q_0] + D_h^{-1}[f_1 q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_1 q_1]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} [f_0 q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_0 q_0 - f_0(m_1 - 1, m_2) q_0(m_1, m_2 + 1) \\
&\quad + f_0(m_1 - 1, m_2) q_0(m_1 - 1, m_2) + f_1 q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_1 q_1 \\
&\quad - f_1(m_1 - 1, m_2) q_1(m_1, m_2 + 1) + f_1(m_1 - 1, m_2) q_1(m_1 - 1, m_2) \\
&\quad + f_0 q_0(m_1 + 1, m_2) - f_0 q_0(m_1 + 1, m_2) + f_0(m_1 - 1, m_2) q_0 - f_0(m_1 - 1, m_2) q_0 \\
&\quad + f_1 q_1(m_1 + 1, m_2) - f_1 q_1(m_1 + 1, m_2) + f_1(m_1 - 1, m_2) q_1 - f_1(m_1 - 1, m_2) q_1] \\
&= f_0 D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) + f_0 D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) - f_0(m_1 - 1, m_2) D_h^2 q_0 \\
&\quad - f_0(m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} q_0 + f_1 D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + f_1 D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) \\
&\quad - f_1(m_1 - 1, m_2) D_h^2 q_1 - f_1(m_1 - 1, m_2) D_h^{-1} q_1 \\
&= f_0(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0(m_1 + 1, m_2) - f_0(m_1 - 1, m_2)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0 \\
&\quad + f_1(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1(m_1 + 1, m_2) - f_1(m_1 - 1, m_2)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1 \\
&\quad + f_0(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0 - f_0(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0 + f_1(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1 - f_1(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1 \\
&= h f_0(D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 q_0 + h (D_h^{-1} f_0)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0 \\
&\quad + h f_1(D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 q_1 + h (D_h^{-1} f_1)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1 .
\end{aligned}$$

Für die anderen Matrixelemente gilt:

Element rechts oben

$$\begin{aligned}
&D_h^{-1}[-f_1 q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) + f_1 q_0] + D_h^{-1}[f_0 q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_0 q_1] \\
&= -h f_1(D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 q_0 - h (D_h^{-1} f_1)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_0 \\
&\quad + h f_0(D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 q_1 + h (D_h^{-1} f_0)(D_h^2 + D_h^{-1}) q_1
\end{aligned}$$

Element links unten

$$\begin{aligned}
&D_h^{-2}[f_0 q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_0 q_0] + D_h^{-2}[f_1 q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_1 q_1] \\
&= h f_0(D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 q_0 + h (D_h^{-2} f_0)(D_h^1 + D_h^{-2}) q_0 \\
&\quad + h f_1(D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 q_1 + h (D_h^{-2} f_1)(D_h^1 + D_h^{-2}) q_1
\end{aligned}$$

Element rechts unten

$$\begin{aligned}
&D_h^{-2}[-f_1 q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) + f_1 q_0] + D_h^{-2}[f_0 q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - f_0 q_1] \\
&= -h f_1(D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 q_0 - h (D_h^{-2} f_1)(D_h^1 + D_h^{-2}) q_0 \\
&\quad + h f_0(D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 q_1 + h (D_h^{-2} f_0)(D_h^1 + D_h^{-2}) q_1 .
\end{aligned}$$

Wird das Ergebnis wieder in Matrixschreibweise zusammengefasst, dann gilt

$$\begin{aligned}
&D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_0 & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= h \left[\begin{pmatrix} (D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 & 0 \\ (D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h \left[\begin{pmatrix} D_h^2 + D_h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] (I_2 D_h^{-1}) f \\
& + h \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_h^1 + D_h^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] (I_2 D_h^{-2}) f.
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Ergebnisse im folgenden Satz zusammenzufassen, der unmittelbar an die diskrete Schrödingergleichung anknüpft. Erwähnt sei an dieser Stelle, dass auch Kravchenko in [Kr2] die Theorie von Bers nutzt, um lokal betrachtet ein vollständiges System von Lösungen der Schrödingergleichung zu erhalten.

Satz 3.3.6 *Es sei q eine Lösung der Gleichung $A(q)f = -uf$ mit*

$$\begin{aligned}
& A(q) \\
& = \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2 + 1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2 + 1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2 + 1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2 + 1) \\ D_h^2 q_0(m_1 + 1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1 + 1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1 + 1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \\
& - h \left[\begin{pmatrix} (D_h^2 + D_h^{-1}) D_h^1 & 0 \\ (D_h^1 + D_h^{-2}) D_h^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] \\
& - h \left[\begin{pmatrix} D_h^2 + D_h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] (I_2 D_h^{-1}) \\
& - h \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_h^1 + D_h^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \right] (I_2 D_h^{-2})
\end{aligned}$$

und $u = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$. Jede Lösung f der diskreten Vekugleichung $D^{1h} f = -qf$ ist auch eine Lösung der diskreten Schrödingergleichung

$$-D^{1h} D^{2h} f = -I_2 \Delta_h f = -uf.$$

Auch die Umkehrung ist möglich:

Ist f eine Lösung der diskreten Schrödingergleichung, dann gilt für $q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix}$ in der Gleichung $D^{1h} f = -qf$ die Beziehung $A(q)f = -uf$. Zum Beweis nutzt man das Assoziativgesetz für Matrizen und die Beziehung

$$\begin{aligned}
& -uf = -D^{1h} D^{2h} f \\
& = D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1+1, m_2+1) & q_1(m_1+1, m_2+1) \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1+1, m_2+1) - q_0 & q_1(m_1+1, m_2+1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2+1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2+1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2+1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2+1) \\ D_h^2 q_0(m_1+1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1+1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1+1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} f \\
&\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2+1) & q_1(m_1, m_2+1) \\ -q_1(m_1+1, m_2) & q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1+1, m_2+1) - q_0 & q_1(m_1+1, m_2+1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= A(q)f.
\end{aligned}$$

Abschließend sei noch einmal darauf hinweisen, dass die Gleichung $A(q)f = -uf$ nur deshalb eine so umfangreiche Struktur hat, weil das Problem der benachbarten Gitterpunkte zu lösen war. Die letzten drei Summanden im Ausdruck $A(q)$ sind durch diese Korrektur in den Gitterpunkten entstanden. Sie zeichnen sich alle durch den Vorfaktor h aus, so dass diese Summanden bei Wahl einer hinreichend kleinen Schrittweite h vernachlässigbar klein werden.

Neben diesen Zusatztermen approximiert die Differenzengleichung

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} D_h^1 q_0(m_1, m_2+1) + D_h^{-2} q_1(m_1, m_2+1) & D_h^1 q_1(m_1, m_2+1) - D_h^{-2} q_0(m_1, m_2+1) \\ D_h^2 q_0(m_1+1, m_2) - D_h^{-1} q_1(m_1+1, m_2) & D_h^2 q_1(m_1+1, m_2) + D_h^{-1} q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2+1) & q_1(m_1, m_2+1) \\ -q_1(m_1+1, m_2) & q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = -u
\end{aligned}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung vom Riccatityp.

Auf der Grundlage der gewählten Symbolik und speziell der Produktformel aus dem Lemma 3.3.4 ist es möglich, die diskrete Schrödingergleichung bis auf zwei verbleibende Summanden in Produktform zu schreiben. Dabei soll nicht unmittelbar vorausgesetzt werden, dass f eine Lösung der diskreten Vekuagleichung $D^{1h}f = -qf$ ist. Die Resultate werden im folgenden Lemma zusammengefasst:

Lemma 3.3.6 *Für die diskrete Schrödingergleichung gilt*

$$\begin{aligned}
&I_2 \Delta_h f - uf \\
&= (D^{1h} + \check{q})(D^{2h} + \bar{q})f \\
&\quad - h \begin{pmatrix} q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_0 - D_h^1 D_h^{-1} f_1] & -q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_1 + D_h^1 D_h^{-1} f_0] \\ -q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_0 + D_h^2 D_h^{-2} f_1] & q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_1 - D_h^2 D_h^{-2} f_0] \end{pmatrix} \\
&\quad - \check{q}[I_2(D_h^1 + D_h^{-1})f + 2q_0 I_2 f]
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \check{q} = \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \text{ und } \bar{q} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Auf Grund der Definition von $A(q)f$ in Satz 3.3.6, der Produktformel in Lemma 3.3.4 und dem Assoziativgesetz für Matrizen gilt

$$\begin{aligned} I_2 \Delta_h f - u f &= I_2 \Delta_h f + A(q)f \\ &= I_2 \Delta_h f + D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^2 & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^1 & -D_h^{-2} \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_0 & q_1(m_1 + 1, m_2 + 1) - q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Beziehung $I_2 \Delta_h f = D^{1h} D^{2h} f$ können die Ausdrücke zusammengefaßt werden zu

$$\begin{aligned} I_2 \Delta_h f - u f &= D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2 + 1) & q_1(m_1, m_2 + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^2 & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_1(m_1 + 1, m_2) & q_0(m_1 + 1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^1 & -D_h^{-2} \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Im folgenden nutzt man die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^2 & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_h^2 - D_h^{-2} & D_h^{-1} - D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h D_h^2 D_h^{-2} & -h D_h^1 D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} D_h^1 & -D_h^{-2} \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_h^1 - D_h^{-1} & -D_h^{-2} + D_h^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hD_h^1 D_h^{-1} & hD_h^2 D_h^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

die unmittelbar aus der Definition der Differenzenoperatoren resultieren. Man erhält

$$\begin{aligned}
& I_2 \Delta_h f - u f \\
&= D^{1h} \left[\begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_h^1 & D_h^2 \\ -D_h^{-2} & D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2+1) & q_1(m_1, m_2+1) \\ -q_1(m_1+1, m_2) & q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D_h^{-1} & -D_h^2 \\ D_h^{-2} & D_h^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \begin{pmatrix} q_0(m_1, m_2+1) & q_1(m_1, m_2+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ hD_h^2 D_h^{-2} & -hD_h^1 D_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_1(m_1+1, m_2) & q_0(m_1+1, m_2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} hD_h^1 D_h^{-1} & hD_h^2 D_h^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & -f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= D^{1h}(\bar{q}f + D^{2h}f) - \check{q}(D^{1h}f + qf) \\
&\quad - h \begin{pmatrix} q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_0 - D_h^1 D_h^{-1} f_1] & -q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_1 + D_h^1 D_h^{-1} f_0] \\ -q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_0 + D_h^2 D_h^{-2} f_1] & q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_1 - D_h^2 D_h^{-2} f_0] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Durch Einfügen einer additiven Null ergibt sich

$$\begin{aligned}
& I_2 \Delta_h f - u f \\
&= D^{1h}(\bar{q}f + D^{2h}f) - \check{q}(D^{1h}f + qf) - \check{q}(D^{2h}f + \bar{q}f) + \check{q}(D^{2h}f + \bar{q}f) \\
&\quad - h \begin{pmatrix} q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_0 - D_h^1 D_h^{-1} f_1] & -q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_1 + D_h^1 D_h^{-1} f_0] \\ -q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_0 + D_h^2 D_h^{-2} f_1] & q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_1 - D_h^2 D_h^{-2} f_0] \end{pmatrix} \\
&= (D^{1h} + \check{q})(D^{2h}f + \bar{q}f) - \check{q}(D^{1h}f + qf + D^{2h}f + \bar{q}f) \\
&\quad - h \begin{pmatrix} q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_0 - D_h^1 D_h^{-1} f_1] & -q_1(m_1, m_2+1)[D_h^2 D_h^{-2} f_1 + D_h^1 D_h^{-1} f_0] \\ -q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_0 + D_h^2 D_h^{-2} f_1] & q_1(m_1+1, m_2)[D_h^1 D_h^{-1} f_1 - D_h^2 D_h^{-2} f_0] \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schließlich wird berücksichtigt, dass

$$D^{1h}f + D^{2h}f = I_2(D_h^1 + D_h^{-1})f \quad \text{und} \quad q + \bar{q} = 2q_0 I_2 \quad \text{gilt} \quad \blacksquare$$

Vermerkt sei, dass in der Darstellungsformel für $I_2 \Delta_h f - uf$ in Lemma 3.3.6 der Summand mit dem Vorfaktor h wieder als verschwindend klein betrachtet werden kann. Der Summand $-\check{q}[I_2(D_h^1 + D_h^{-1})f + 2q_0 I_2 f]$ ist durchaus typisch für Produktformeln. Erinnert sei hier an die für Quaternionen geltende Leibnitzformel $D(uv) = (Du)v + \bar{u}(Dv) + 2\text{Re}(uD)v$ mit $D = \frac{\partial}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}e_3$ (vgl. [GS1]). Dieser Summand verhindert aber insbesondere auch, dass der Schrödingeroperator im Moment vollständig faktorisiert werden kann. Möglicherweise kann diese Schwierigkeit in Zukunft überwunden werden, so wie auch im kontinuierlichen Fall die Faktorisierung des Schrödingeroperators mit Hilfe der Operatoren

$$M^q f = f \cdot q \quad \text{und} \quad \overline{M^q} f = \bar{f} \cdot q \quad \text{vollständig gelingt.}$$

3.3.5 Diskrete Navier-Stokes-Gleichungen

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode findet man bereits im Buch [GS1] der Autoren Gürlebeck und Sprößig. Jedoch beruhen die früheren Darstellungen auf Differenzenoperatoren, die nicht die Kopplung zwischen Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen nutzen. Diese Kopplung ermöglicht aber gerade die Faktorisierung des Laplaceoperators. Da in der vorliegenden Arbeit alle Gleichungen zusammenhängen und auf den gleichen Differenzenoperatoren beruhen, sollen die diskreten Navier-Stokes-Gleichungen nicht ausgelassen werden. Sie sind auch für zukünftige Untersuchungen, beispielsweise Aussagen zu gekoppelten Problemen, von Bedeutung.

Auf der Grundlage des Stokesproblems soll nun eine Möglichkeit zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_0(m) + \frac{1}{\mu} D_h^1 p(m) + \frac{\varrho}{\mu} \left(u_0(m) D_h^{-1} u_0(m) + u_1(m) D_h^{-2} u_0(m) \right) &= \frac{\varrho}{\mu} f_0(m) \\ -\Delta_h u_1(m) + \frac{1}{\mu} D_h^2 p(m) + \frac{\varrho}{\mu} \left(u_0(m) D_h^{-1} u_1(m) + u_1(m) D_h^{-2} u_1(m) \right) &= \frac{\varrho}{\mu} f_1(m) \\ D_h^{-1} u_0(m) + D_h^{-2} u_1(m) &= 0 \\ u(r) &= (0, 0)^T \end{aligned} \tag{3.33}$$

für alle $m \in G_h$ und $r \in \gamma_h^-$ angegeben werden. Dazu wird das Ausgangsproblem entsprechend dem folgenden Satz umformuliert. Zur Vereinfachung der Schreibweise dient die Bezeichnung

$$\begin{aligned} M_{h0}(m) &= \frac{\varrho}{\mu} \left(u_0(m) D_h^{-1} u_0(m) + u_1(m) D_h^{-2} u_0(m) \right) - \frac{\varrho}{\mu} f_0(m) \\ M_{h1}(m) &= \frac{\varrho}{\mu} \left(u_0(m) D_h^{-1} u_1(m) + u_1(m) D_h^{-2} u_1(m) \right) - \frac{\varrho}{\mu} f_1(m). \end{aligned}$$

Satz 3.3.7 *Das Randwertproblem (3.33) ist äquivalent zum Problem*

$$\begin{aligned} u(mh) &= (T_{h,M}^2 Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+ [0, p])(m) \\ &\quad - (Q_{h2}^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) = \frac{1}{\mu} (Q_{h2}^+ [0, p])(m), \end{aligned} \quad (3.34)$$

wobei Q_{h2}^+ die zweite Zeile in der 2×2 -Matrix zu Q_h^+ bezeichnet und $M_h(m) = (M_{h0}(m), M_{h1}(m))^T$ gilt.

Beweis: Es sei (u, p) eine Lösung des Problems (3.34). Dann gilt

$$\begin{aligned} &-I_2 \Delta_h u(m) \\ &= -D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 \left[(T_{h,M}^2 Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+ [0, p])(m) \right] \\ &= -D_{h,M}^1 \left[(Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (Q_h^+ [0, p])(m) \right] \\ &= -M_h(m) - \frac{1}{\mu} [\text{grad}_h^+ p](m). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \text{div}_h^- u(m) &= \text{div}_h^- \left[(T_{h,M}^2 Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+ [0, p])(m) \right] \\ &= (Q_{h2}^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (Q_{h2}^+ [0, p])(m) = 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingung des Problems (3.33) ist erfüllt, da die Lösung des Problems (3.34) auf Grund der Eigenschaft des Orthoprojektors Q_h^+ von der Gestalt

$$T_{h,M}^2 (D_{h,M}^2 s)(m) = s(m) - (F_{h,M}^2 s)(m)$$

mit $s_0(m), s_1(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h)$ ist. Es sei nun (u, p) eine Lösung des Problems (3.33). Mit Hilfe der Borel-Pompeiu-Formel erhält man

$$T_{h,M}^1 (I_2 \Delta_h u)(m) = T_{h,M}^1 (D_{h,M}^1 D_{h,M}^2 u)(m) = D_{h,M}^2 u(m) - F_{h,M}^1 (D_{h,M}^2 u)(m).$$

Durch Anwendung des Operators Q_h^+ gilt

$$Q_h^+ T_{h,M}^1 (I_2 \Delta_h u)(m) = Q_h^+ (D_{h,M}^2 u)(m) - Q_h^+ F_{h,M}^1 (D_{h,M}^2 u)(m) = D_{h,M}^2 u(m).$$

Man beachte dabei, dass $F_{h,M}^1$ die Randwerte auf $\ker D_{h,M}^1$ abbildet. Andererseits folgt aus dem Randwertproblem (3.33)

$$\begin{aligned} Q_h^+ T_{h,M}^1 (I_2 \Delta_h u)(m) &= Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h)(m) + \frac{1}{\mu} Q_h^+ (T_{h,M}^1 (D_{h,M}^1 [0, p]))(m) \\ &= Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h)(m) + \frac{1}{\mu} (Q_h^+ [0, p])(m). \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen resultiert

$$D_{h,M}^2 u(m) = Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h)(m) + \frac{1}{\mu} (Q_h^+ [0, p])(m).$$

Schließlich erhält man die erste Gleichung von (3.34) mit Hilfe des Operators $T_{h,M}^2$ unter nochmaliger Verwendung der Borel-Pompeiu-Formel. Die zweite Gleichung resultiert aus der Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}_h^- u(m) = \operatorname{div}_h^- [(T_{h,M}^2 Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h))(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+ [0, p])(m)] \\ &= Q_{h2}^+ (T_{h,M}^1 M_h)(m) + \frac{1}{\mu} (Q_{h2}^+ [0, p])(m) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ausgehend von den Gleichungen (3.34) kann das folgende Iterationsverfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.33) aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} u^n(m) &= T_{h,M}^2 Q_h^+ (T_{h,M}^1 M_h^{n-1})(m) + \frac{1}{\mu} (T_{h,M}^2 Q_h^+ [0, p^n])(m) \\ &\quad - Q_{h2}^+ (T_{h,M}^1 M_h^{n-1})(m) = \frac{1}{\mu} (Q_{h2}^+ [0, p^n])(m) \end{aligned}$$

mit

$$M_{hj}^{n-1}(m) = \frac{\varrho}{\mu} \left(u_0^{n-1}(m) D_h^{-1} u_j^{n-1}(m) + u_1^{n-1}(m) D_h^{-2} u_j^{n-1}(mh) \right) - \frac{\varrho}{\mu} f_j(mh)$$

für $j = 0, 1$, $(u_0^0(m), u_1^0(mh))^T \in \mathring{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ und $n = 1, 2, 3, \dots$.

Dadurch ist die Lösung des Randwertproblems (3.33) auf die Lösung (u^n, p^n) von Stokesproblemen für $n = 1, 2, 3, \dots$ zurückgeführt, deren Eindeutigkeit im Satz 3.3.2 bewiesen wurde. Zu zeigen bleibt, dass das Iterationsverfahren gegen die Lösung des Problems (3.33) konvergiert. Lemma 2.4.4 sowie Lemma 2.4.5 bilden die Grundlage des Beweises. Folgerung 2.4.1 bezieht sich auf zwei Spezialfälle, die unmittelbar aus Lemma 2.4.5 folgen. Sie sind von besonderem Interesse für die weiteren Untersuchungen.

Satz 3.3.8 *Es sei $\|f\|_{l_p(G_h)} \leq C_4 \left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2$. Für jede Funktion $u^0(m) \in \mathring{w}_2^1(G_h) \cap \ker \operatorname{div}_h^-$ mit*

$$\|u^0\|_{w_2^1(G_h)} \leq \frac{\mu}{16KC_4\varrho} + \Omega \quad \text{und} \quad \Omega = \sqrt{\left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2 - \frac{\|f\|_{l_p(G_h)}}{C_4}}$$

konvergiert das obige Iterationsverfahren gegen die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.33).

Beweis: Es sei

$$[\text{grad}_h^- u_i^n](m) = \begin{pmatrix} D_h^{-1} u_i^n(m) \\ D_h^{-2} u_i^n(m) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1.$$

Basierend auf Lemma 2.4.4 und Lemma 2.4.5 definiert man

$$K = \|T_{h,M}^2\|_{[l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+, w_2^1(G_h)]} \|T_{h,M}^1\|_{[l_p(G_h), l_2(G_h)]}.$$

Betrachtet wird die Differenz $u^n(m) - u^{n-1}(m)$. Indem man $(f_0(m), f_1(m))^T$ durch $(M_{h0}(m), M_{h1}(m))^T$ ersetzt, gilt in Analogie zur Beziehung (3.21)

$$\frac{1}{\mu} \|Q_h^+[0, p^n - p^{n-1}]\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+} \leq \|Q_h^+(T_{h,M}^1[M_{h0}^{n-1} - M_{h0}^{n-2}, M_{h1}^{n-1} - M_{h1}^{n-2}])\|_{l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+}.$$

Unter Beachtung der Eigenschaft

$$\|Q_h^+\|_{[l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+]} = 1$$

des Orthoprojektors Q_h^+ folgt aus dem Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \|u^n - u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} &\leq \|T_{h,M}^2 Q_h^+(T_{h,M}^1[M_{h0}^{n-1} - M_{h0}^{n-2}, M_{h1}^{n-1} - M_{h1}^{n-2}])\|_{w_2^1(G_h)} \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \|T_{h,M}^2 Q_h^+[0, p^n - p^{n-1}]\|_{w_2^1(G_h)} \\ &\leq 2 \|T_{h,M}^2\|_{[l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+, w_2^1(G_h)]} \|Q_h^+\|_{[l_2(G_h), l_2(G_h) \cap \text{im } Q_h^+]} \\ &\quad \cdot \|T_{h,M}^1\|_{[l_p(G_h), l_2(G_h)]} \|M_{h0}^{n-1} - M_{h0}^{n-2}, M_{h1}^{n-1} - M_{h1}^{n-2}\|_{l_p(G_h)} \\ &\leq 2 K \|M_{h0}^{n-1} - M_{h0}^{n-2}, M_{h1}^{n-1} - M_{h1}^{n-2}\|_{l_p(G_h)}. \end{aligned}$$

Mittels $a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2$ und der Minkowskischen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} &\|M_{h0}^{n-1} - M_{h0}^{n-2}, M_{h1}^{n-1} - M_{h1}^{n-2}\|_{l_p(G_h)} \\ &= \frac{\varrho}{\mu} \left(\sum_{mh \in G_h} h^2 \left[(u^{n-1} \text{grad}_h^- u_0^{n-1} - u^{n-2} \text{grad}_h^- u_0^{n-2})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (u^{n-1} \text{grad}_h^- u_1^{n-1} - u^{n-2} \text{grad}_h^- u_1^{n-2})^2 \right]^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varrho}{\mu} \left(\sum_{mh \in G_h} h^2 \left[|u^{n-1} \text{grad}_h^- u_0^{n-1} - u^{n-2} \text{grad}_h^- u_0^{n-2}| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |u^{n-1} \text{grad}_h^- u_1^{n-1} - u^{n-2} \text{grad}_h^- u_1^{n-2}| \right]^p \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varrho}{\mu} \sum_{j=0}^1 \|u^{n-1} \text{grad}_h^- u_j^{n-1} - u^{n-2} \text{grad}_h^- u_j^{n-2}\|_{l_p(G_h)} \\ &\leq \frac{\varrho}{\mu} \sum_{j=0}^1 \left[\|(u^{n-1} - u^{n-2}) \text{grad}_h^- u_j^{n-1}\|_{l_p(G_h)} + \|u^{n-2} \text{grad}_h^- (u_j^{n-1} - u_j^{n-2})\|_{l_p(G_h)} \right]. \end{aligned}$$

Die beiden Normen auf der rechten Seite haben die Gestalt $\|w \operatorname{grad}_h^- v_j\|_{l_p(G_h)}$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\|w \operatorname{grad}_h^- v_j\|_{l_p(G_h)} \leq \|w\|_{l_{pq_1}(G_h)} \|\operatorname{grad}_h^- v_j\|_{l_{pp_1}(G_h)} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1.$$

Betrachtet wird der Spezialfall $pp_1 = 2$. Hier gilt

$$q := pq_1 = \frac{2p}{2-p} \quad \text{und} \quad p = \frac{2q}{2+q}.$$

Auf Grund der Definition der diskreten Sobolevnorm erhält man für $j = 0, 1$

$$\begin{aligned} \|w \operatorname{grad}_h^- v_j\|_{l_p(G_h)} &\leq \|w\|_{l_q(G_h)} \left(\sum_{mh \in G_h} h^2 [(D_h^{-1} v_j)^2 + (D_h^{-2} v_j)^2] \right)^{1/2} \\ &= \|w\|_{l_q(G_h)} \left(\sum_{i=1}^2 \|D_h^{-i} v_j\|_{l_2(G_h)}^2 \right)^{1/2} \leq \|w\|_{l_q(G_h)} \|v\|_{w_2^1(G_h)}. \end{aligned}$$

Ferner soll gezeigt werden, dass für $w \in \mathring{w}_2^1(G_h)$ gilt $\|w\|_{l_q(G_h)} \leq C_4 \|w\|_{w_2^1(G_h)}$. Aus der Borel-Pompeiu-Formel folgt auf Grund der speziellen Wahl der Randwerte

$$\|w\|_{l_q(G_h)} = \|T_{h,M}^2 (D_{h,M}^2 w)\|_{l_q(G_h)} \quad \text{mit} \quad D_{h,M}^2 w \in l_2(G_h) \cap \operatorname{im} Q_h^+.$$

Mit Hilfe von Folgerung 2.4.1 und den äquivalenten Umformungen im Beweis von Lemma 2.4.4 erhält man schließlich

$$\|T_{h,M}^2 (D_{h,M}^2 w)\|_{l_q(G_h)} \leq C_4 \|D_{h,M}^2 w\|_{l_2(G_h)} \leq C_4 \|w\|_{w_2^1(G_h)}.$$

Als erstes Zwischenergebnis resultiert daraus

$$\|u^n - u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} \leq 4K C_4 \frac{\varrho}{\mu} \|u^{n-1} - u^{n-2}\|_{w_2^1(G_h)} \left(\|u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} + \|u^{n-2}\|_{w_2^1(G_h)} \right).$$

Indem man schließlich $L_n = 4K C_4 \frac{\varrho}{\mu} (\|u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} + \|u^{n-2}\|_{w_2^1(G_h)})$ setzt ergibt sich

$$\|u^n - u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} \leq L_n \|u^{n-1} - u^{n-2}\|_{w_2^1(G_h)}.$$

Wird $0 \leq \|u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)} \leq \frac{\mu}{16KC_4\varrho} + \Omega$ mit

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2 - \frac{\|f\|_{l_p(G_h)}}{C_4}} \quad \text{und} \quad \|f\|_{l_p(G_h)} \leq C_4 \left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2$$

vorausgesetzt, so folgt aus dem Iterationsverfahren in Analogie zu den obigen Beweisschritten

$$\|u^n\|_{w_2^1(G_h)} \leq 2K \frac{\varrho}{\mu} \left(\sum_{mh \in G_h} h^2 \left[(u^{n-1} \operatorname{grad}_h^- u_0^{n-1} - f_0)^2 + (u^{n-1} \operatorname{grad}_h^- u_1^{n-1} - f_1)^2 \right]^{p/2} \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2K \frac{\varrho}{\mu} \sum_{j=0}^1 \left[\|u^{n-1} \operatorname{grad}_h^- u_j^{n-1}\|_{l_p(G_h)} + \|f\|_{l_p(G_h)} \right] \\
&\leq 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \|u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)}^2 + 4K \frac{\varrho}{\mu} \|f\|_{l_p(G_h)} \\
&\leq 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \left[\left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} + \Omega \right)^2 + \frac{\|f\|_{l_p(G_h)}}{C_4} \right] \\
&= 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \left[\left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2 + \frac{\mu\Omega}{8KC_4\varrho} + (\Omega)^2 + \frac{\|f\|_{l_p(G_h)}}{C_4} \right] \\
&\leq \frac{\mu}{64KC_4\varrho} + \frac{\Omega}{2} + 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} + \Omega \right).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Ungleichung

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} (\|u^n\|_{w_2^1(G_h)} + \|u^{n-1}\|_{w_2^1(G_h)}) \leq 4KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \frac{3}{2} \left(\frac{\mu}{16KC_4\varrho} + \Omega \right) \\
&\leq 6KC_4 \frac{\varrho}{\mu} \left(2 \frac{\mu}{16KC_4\varrho} \right) = \frac{3}{4} < 1
\end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$ kann der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden und die Behauptung des Satzes ist bewiesen ■

Da es auch in der klassischen Theorie ein ähnliches Iterationsverfahren gibt, besteht die Möglichkeit, die Differenz zwischen der diskreten und der kontinuierlichen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen abzuschätzen, indem man die jeweiligen Ausdrücke im gleichen Iterationsschritt untersucht. Auf Grund dessen, dass auf die klassische Theorie der Navier-Stokes Gleichungen in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wurde und insbesondere die Eigenschaften der klassischen Operatoren nicht erwähnt wurden, soll an dieser Stelle auf eine detaillierte Untersuchung verzichtet werden. Verwiesen sei jedoch auf das Buch [GS2] und den Artikel [FGHK], wobei zu beachten ist, dass in [GS2] mit anderen Differenzenoperatoren gearbeitet wird und im Artikel [FGHK] Dirac-Operatoren im unbeschränkten Gebiet betrachtet werden.

3.3.5.1 Potential- und Stromfunktionen

Ausgehend von einem Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen im ebenen Fall werden nun diskrete Potential- und Stromfunktionen berechnet. Dabei spielen funktionentheoretische Methoden für Gitterfunktionen eine wesentliche Rolle. Der entscheidende Vorteil der diskreten Theorie liegt darin, dass nicht nur wichtige algebraische Eigenschaften im Modell enthalten sind, sondern die entwickelten Formeln auch direkt für numerische Berechnungen genutzt werden können. Anhand von zwei numerischen Beispielen wird die Anwendbarkeit der Methode bei der Berechnung von Stromlinien gezeigt.

Als Ausgangspunkt wird zunächst der kontinuierliche Fall betrachtet.

Es sei $x = (x_1, x_2)$. Die stationären Navier-Stokes Gleichungen haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \varrho \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) &= \varrho f_0(x) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \varrho \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \varrho f_1(x) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei in Analogie zum Abschnitt 3.3.1 ϱ die Dichte, μ die Viskosität, p den Druck, f_0 und f_1 die Vektorkomponenten der äußeren Kräfte und u_0 und u_1 die Geschwindigkeitskomponenten des fließenden Mediums bezeichnen. Untersucht wird hier der reibungslose Fall $\mu = 0$. Gleichzeitig sei $f_0(x) = f_1(x) = 0$. Zunächst soll der Druck aus den Gleichungen (3.35) eliminiert werden. Aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ &+ u_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Auf Grund des Massenerhaltungssatzes gilt für ebene, inkompressible Fluide die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \quad (3.37)$$

Aus (3.36) und (3.37) folgt

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} = 0, \quad (3.38)$$

so dass zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten u_0 und u_1 die Gleichungen (3.37) und (3.38) genutzt werden können. Es sei vermerkt, dass die Bedingung $\mu = 0$ entfallen kann, da durch Differentiation von (3.38) nach x_2 und Differentiation von (3.37) nach x_1 folgt

$$\Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} = 0.$$

Analog erhält man $\Delta u_1 = 0$ durch Differentiation von (3.38) nach x_1 und Differentiation von (3.37) nach x_2 . Aus dem Ansatz

$$u_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \quad u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

resultiert für die Potentialfunktion $\Phi(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \Delta \Phi = 0\end{aligned}$$

und für die Stromfunktion $\Psi(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} &= -\Delta \Psi = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.\end{aligned}$$

Zwischen Potentialfunktion $\Phi(x_1, x_2)$ und Stromfunktion $\Psi(x_1, x_2)$ gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = u_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = u_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

Ausgehend von den Beziehungen im kontinuierlichen Fall soll nun eine Möglichkeit der Diskretisierung vorgestellt werden, deren Ziel es ist, Potential- und Stromfunktion mit Hilfe der diskreten Cauchy–Riemann-Gleichungen numerisch berechnen zu können. Im Mittelpunkt steht die Visualisierung von Stromlinien, die sich durch die Eigenschaft $\Psi = \textit{konstant}$ auszeichnen.

Betrachtet wird dazu ein gleichmäßiges Gitter der Schrittweite h mit den Gitterpunkten $x = (x_1, x_2) = (lh, kh)$, $l, k \in \mathbb{Z}$. Mittels Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen kann das System (3.35) in der Form

$$\begin{aligned}& \varrho(u_0(l, k) D_h^1 u_0(l, k-1) + u_1(l, k) D_h^2 u_0(l, k-1)) \\ &= \varrho f_0(l, k) + \mu(D_h^{-1} D_h^1 u_0(l, k) + D_h^{-2} D_h^2 u_0(l, k)) - D_h^1 p(l, k) \\ & \varrho(u_0(l, k) D_h^1 u_1(l-1, k) + u_1(l, k) D_h^2 u_1(l-1, k)) \\ &= \varrho f_1(l, k) + \mu(D_h^{-1} D_h^1 u_1(l, k) + D_h^{-2} D_h^2 u_1(l, k)) - D_h^2 p(l, k)\end{aligned}$$

diskretisiert werden. Eine geringfügige Vereinfachung dieses Systems wird durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}D_h^2 u_0(l, k-1) &= D_h^{-2} u_0(l, k) \quad \text{beziehungsweise} \\ D_h^1 u_1(l-1, k) &= D_h^{-1} u_1(l, k)\end{aligned}$$

erzielt. Folglich werden im Vergleich zum Problem (3.33) nur an zwei Stellen Vorwärtsableitungen statt Rückwärtsableitungen betrachtet. In Analogie zum kontinuierlichen Fall wird auch hier der Spezialfall $\mu = 0$ sowie $f_0(l, k) = f_1(l, k) = 0$ betrachtet und der Druck eliminiert. Aus der Gleichung

$$\begin{aligned}& -D_h^2 (u_0(l, k) D_h^1 u_0(l, k-1) + u_1(l, k) D_h^2 u_0(l, k-1)) \\ &+ D_h^1 (u_0(l, k) D_h^1 u_1(l-1, k) + u_1(l, k) D_h^2 u_1(l-1, k)) = 0\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
& -D_h^2 u_0(l, k) (D_h^1 u_0(l, k) + D_h^2 u_1(l, k)) \\
& + D_h^1 u_1(l, k) (D_h^1 u_0(l, k) + D_h^2 u_1(l, k)) \\
& + u_0(l, k) D_h^1 (D_h^{-1} u_1(l, k) - D_h^{-2} u_0(l, k)) \\
& + u_1(l, k) D_h^2 (D_h^{-1} u_1(l, k) - D_h^{-2} u_0(l, k)) = 0,
\end{aligned}$$

wobei

$$D_h^1 u_0(l, k) + D_h^2 u_1(l, k) = 0$$

die Kontinuitätsgleichung (3.37) und

$$D_h^{-1} u_1(l, k) - D_h^{-2} u_0(l, k) = 0$$

die Gleichung (3.38) approximieren.

Da bei diesen Gleichungen nur auf den Gitterpunkt (l, k) Bezug genommen wird, soll das Argument zur Vereinfachung der Formeln in Zukunft weggelassen werden. Auch im diskreten Fall kann die Bedingung $\mu = 0$ entfallen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
D_h^{-1} (D_h^1 u_0 + D_h^2 u_1) &= 0 & (I) \\
D_h^2 (D_h^{-1} u_1 - D_h^{-2} u_0) &= 0. & (II)
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichung (II) von (I) erhält man

$$D_h^{-1} D_h^1 u_0 + D_h^{-2} D_h^2 u_0 = \Delta_h u_0 = 0.$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
D_h^{-2} (D_h^1 u_0 + D_h^2 u_1) &= 0 & (III) \\
D_h^1 (D_h^{-1} u_1 - D_h^{-2} u_0) &= 0 & (IV)
\end{aligned}$$

und aus der Addition von (III) und (IV) folgt $\Delta_h u_1 = 0$. Aus dem Ansatz

$$u_0 = D_h^{-1} \Phi_h = D_h^2 \Psi_h \quad \text{und} \quad u_1 = D_h^{-2} \Phi_h = -D_h^1 \Psi_h$$

resultieren folgende Eigenschaften der diskreten Potentialfunktion Φ_h

$$\begin{aligned}
D_h^{-1} u_1 - D_h^{-2} u_0 &= D_h^{-1} D_h^{-2} \Phi_h - D_h^{-2} D_h^{-1} \Phi_h = 0 \\
D_h^1 u_0 + D_h^2 u_1 &= D_h^1 D_h^{-1} \Phi_h + D_h^2 D_h^{-2} \Phi_h = \Delta_h \Phi_h = 0,
\end{aligned}$$

während für die diskrete Stromfunktion Ψ_h gilt

$$\begin{aligned}
D_h^{-1} u_1 - D_h^{-2} u_0 &= -D_h^{-1} D_h^1 \Psi_h - D_h^{-2} D_h^2 \Psi_h = -\Delta_h \Psi_h = 0 \\
D_h^1 u_0 + D_h^2 u_1 &= D_h^1 D_h^2 \Psi_h - D_h^2 D_h^1 \Psi_h = 0.
\end{aligned}$$

Der obige Ansatz mit der diskreten Potential- und Stromfunktion kann auch in der Form

$$D_{h,M}^1 \begin{pmatrix} \Phi_h \\ \Psi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Damit ist der direkte Bezug zu den diskreten Cauchy–Riemann-Gleichungen im Kapitel 2 hergestellt und alle Eigenschaften dieser Operatoren können genutzt werden. In den folgenden numerischen Beispielen spielt vor allem der Eindeutigkeitssatz 2.3.5 eine wesentliche Rolle.

3.3.5.2 Numerische Resultate

Um die Qualität der numerischen Ergebnisse mittels Fehleranalyse beurteilen zu können, wurden zwei Beispiele ausgewählt, bei denen die Stromlinien auch analytisch berechnet werden können.

Beispiel 1: Zu berechnen sind die Stromlinien für die ebene Staupunktströmung mit der Potentialfunktion

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a (x_1^2 - x_2^2).$$

Auf Grund des Ansatzes

$$u_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$

gilt $u_0(0, 0) = u_1(0, 0) = 0$. Aus der Beziehung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

und dem Ansatz mit der Potentialfunktion für die Geschwindigkeitskomponenten u_0 und u_1 folgt

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_2 = a x_2 dx_1 + a x_1 dx_2 = 0.$$

Mittels Integration ergibt sich für die Stromlinien $x_1 x_2 = \textit{konstant}$ (Abb. 5.1).

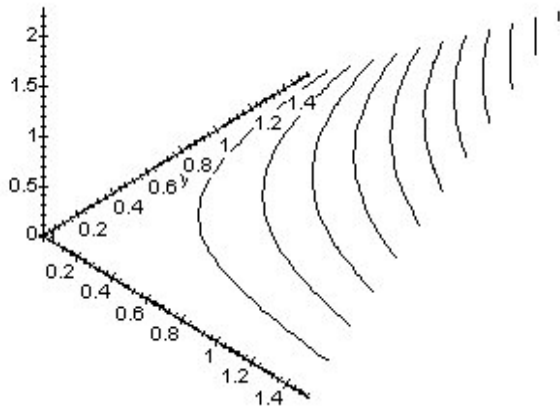


Abbildung 5.1
Verlauf der Strom-
linien im Beispiel 1
kontinuierlicher Fall

Im Spezialfall $a = 1$ wurde folgendes Cauchy-Riemann-Problem zur Berechnung der Stromfunktion Ψ_h im Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1.5, 0)$, $(1.5, 1.5)$ und $(0, 1.5)$ gelöst:

$$\begin{aligned} D_{h,M}^1 \begin{pmatrix} \Phi_h(m) \\ \Psi_h(m) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall m \in G_h \\ \Phi_h(rh) &= \frac{1}{2}((r_1h)^2 - (r_2h)^2) \quad \forall rh \in \gamma_h^- \\ \Psi_h(m^*h) &= (m_1^*h)(m_2^*h) \quad \text{mit} \quad m_1^* = m_2^* = 1. \end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz 2.3.5 ist die Lösung des Cauchy-Riemann-Problems durch die Vorgabe von Ψ_h im Punkt m^*h eindeutig bestimmt. Den berechneten Approximationsfehler der Stromfunktion in der l_2 -Norm und c -Norm findet man in Tabelle 5.1.

Schrittweite h	7.8125E-3
Anzahl Randgitterpunkte	764
Anzahl innerer Gitterpunkte	36481
l_2 -Norm des Fehlers von Ψ_h in G_h	
absoluter Fehler	9.3525E-3
relativer Fehler	8.3787E-3
c -Norm des Fehlers von Ψ_h in G_h	
absoluter Fehler	1.1596E-2

Tabelle 5.1
Approximationsfehler
der Stromfunktion im
Beispiel 1

Zusätzlich ist in Abbildung 5.2 das Stromlinienverhalten von Ψ_h graphisch dargestellt. Dabei kommt der enge Zusammenhang zwischen den analytisch berechneten Stromlinien in Abbildung 5.1 und dem numerisch bestimmten Verhalten der Stromlinien in Abbildung 5.2 sehr deutlich zum Ausdruck.

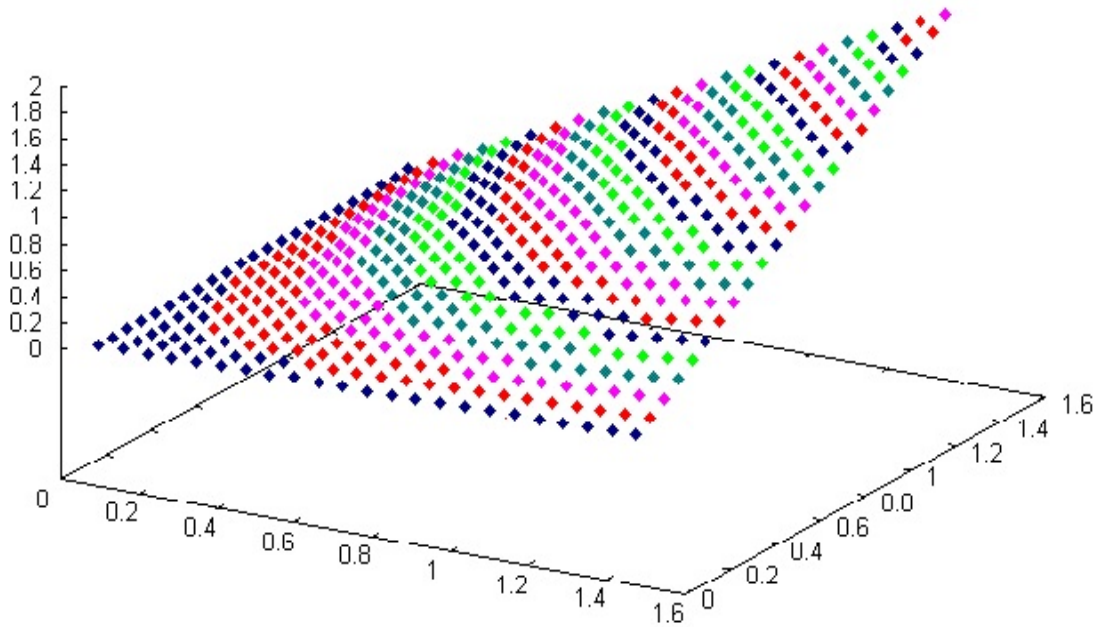


Abbildung 5.2 Stromlinienverlauf im Beispiel 1, diskreter Fall

Beispiel 2: Als Ausgangspunkt wird die komplexe Funktion

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n$$

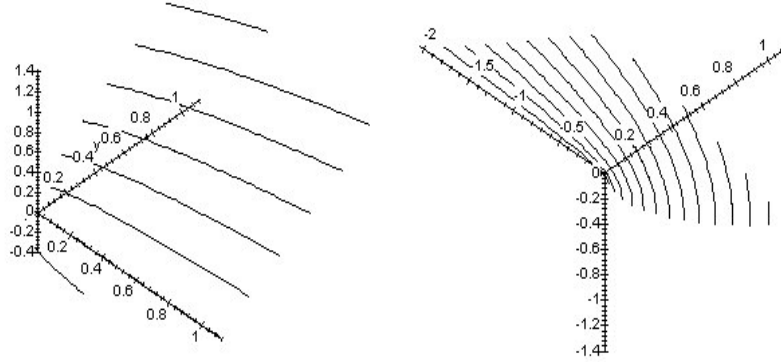
betrachtet, wobei a und n reelle Konstanten sind. Man zerlegt $F(z)$ in Real- und Imaginärteil mit $F(z) = F(x_1 + ix_2) = \Phi(x_1, x_2) + i\Psi(x_1, x_2)$ und führt andererseits Polarkoordinaten $z = r e^{i\varphi}$ ein, aus denen die Darstellung

$$F(z) = \frac{a}{n} r^n e^{in\varphi} = \frac{a}{n} r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

resultiert. Daraus ergeben sich für die Potentialfunktion und Stromfunktion die Beziehungen

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{a}{n} r^n \cos(n\varphi) \quad \text{und} \quad \Psi(r, \varphi) = \frac{a}{n} r^n \sin(n\varphi).$$

Das Stromlinienverhalten im Spezialfall $n = \frac{2}{3}$ und $a = 1$ ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

**Abbildung 5.3**

Verlauf der Stromlinien im Beispiel 2, kontinuierlicher Fall

Zur Berechnung der diskreten Stromfunktion Ψ_h im Quadrat mit den Eckpunkten $(-0.15, -0.15)$, $(1.1, -0.15)$, $(1.1, 1.1)$ und $(-0.15, 1.1)$ wurde folgendes Cauchy-Riemann-Problem gelöst:

$$D_{h,M}^1 \begin{pmatrix} \Phi_h(m) \\ \Psi_h(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall m \in G_h$$

$$\Phi_h(rh) = \frac{3}{2}((r_1h)^2 + (r_2h)^2)^{1/3} \cos\left(\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{r_2h}{r_1h}\right)\right) \quad \forall rh \in \gamma_h^-$$

$$\Psi_h(m^*h) = \frac{3}{2}((m_1^*h)^2 + (m_2^*h)^2)^{1/3} \sin\left(\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{m_2^*h}{m_1^*h}\right)\right) \quad \text{mit } m_1^* = m_2^* = 1.$$

In Tabelle 5.2 ist der Approximationsfehler der Stromfunktion Ψ_h in der l_2 -Norm angegeben.

Schrittweite h	7.8125E-3
Anzahl Randgitterpunkte	636
Anzahl innerer Gitterpunkte	25281
l_2 -Norm des Fehlers von Ψ_h in G_h	
absoluter Fehler	6.6273E-1
relativer Fehler	7.6731E-1

Tabelle 5.2

Approximationsfehler
der Stromfunktion im
Beispiel 2

Im Vergleich zum Beispiel 1 ist bei diesen Berechnungen ein qualitativ größerer Approximationsfehler aufgetreten. Dieses Beispiel wurde ausgewählt, da es im kontinuierlichen Fall mit Hilfe von Polarkoordinaten einfach ist, die Stromlinien zu berechnen. Andererseits wird das Problem mit Hilfe von Differenzenableitungen approximiert, die für kartesische Koordinaten definiert sind. Diese Schwierigkeit kommt

beim Approximationsfehler deutlich zum Ausdruck. Dennoch spiegeln die in Abbildung 5.4 dargestellten Stromlinien der Funktion Ψ_h das Verhalten der Stromlinien in Abbildung 5.3 in überzeugender Weise wieder.

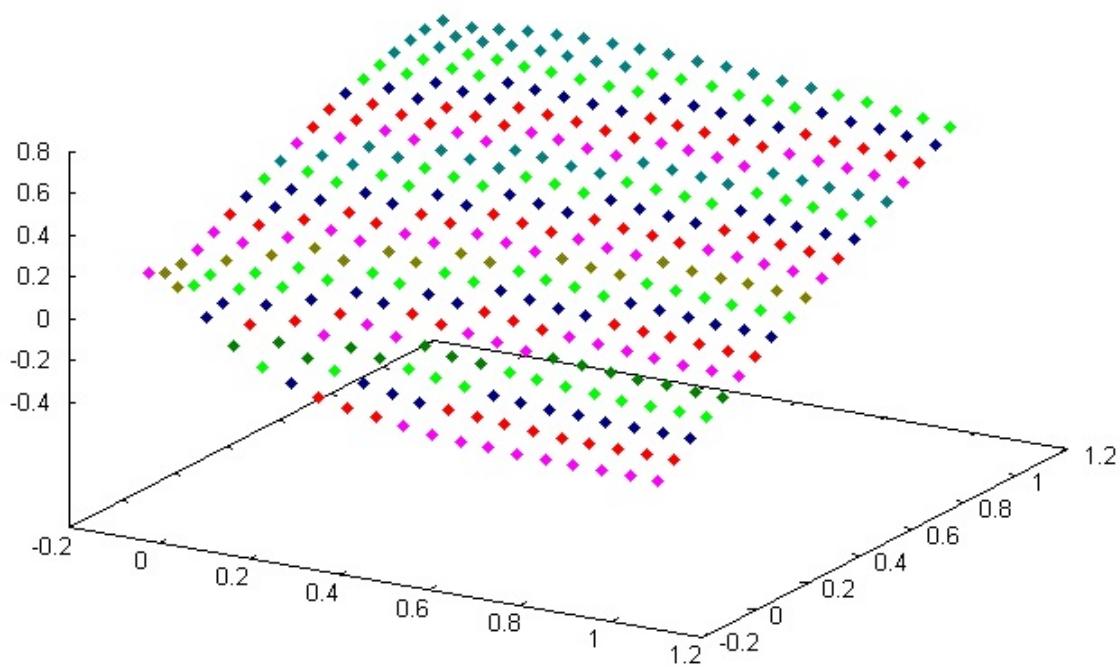


Abbildung 5.4 Stromlinienverlauf im Beispiel 2, diskreter Fall

Kapitel 4

Elementare Funktionen in der Quaternionenanalysis - Ein Ausblick auf die mögliche Erweiterung der Theorie

In den Kapiteln 2 und 3 werden Sachverhalte untersucht, bei denen die Theorie im kontinuierlichen Fall weit entwickelt ist. Damit ist der Grundstein gelegt, um nach diskreten Methoden zu suchen, die einerseits wichtig für die numerischen Realisierung sind, andererseits aber auch eine gezielte Fehleranalyse ermöglichen. Beim Versuch, die diskrete Theorie weiter auszubauen, wurde jedoch festgestellt, dass auch im kontinuierlichen Fall auf dem Gebiet der Quaternionenanalysis noch Funktionen genauer zu untersuchen sind, um wichtige Eigenschaften herauszuarbeiten. Ein Beispiel dafür sind die am Ende von Abschnitt 3.2.1 diskutierten Vekua-Gleichungen im quaternionischen Fall. Will man hier die Theorie im Hinblick auf das Ähnlichkeitsprinzip weiter ausbauen, stellt sich die Frage, welche Anforderungen man im hyperkomplexen Fall an eine Exponentialfunktion stellt. Erfreulicherweise kann im Abschnitt 4.1 eine hyperkomplexe Exponentialfunktion vorgestellt werden, die die bisherigen Überlegungen in eine ganz neue Richtung lenkt. Nachdem diese Herangehensweise zunächst prinzipiell abgelehnt wurde, ist sie dennoch in recht kurzer Zeit von mehreren Autoren aufgegriffen und weiterentwickelt worden. Im Abschnitt 4.2 folgen einige Ausführungen zur Sinus- und Cosinusfunktion im höherdimensionalen Fall. Im Abschnitt 4.3 sollen erste Ansätze im Hinblick auf eine hyperkomplexe Fouriertransformation vorgestellt werden, die auf den Überlegungen im Abschnitt 4.1 und 4.2 aufbauen. Gerade das letzte Gebiet ist ein hochmodernes Forschungsgebiet, auf dem es viele verschiedene Herangehensweisen gibt. In der aktuellen Forschung wird beispielsweise der Zusammenhang zwischen der quaternionischen Fouriertransformation, die im quaternionischen Bereich angewendet wird und der auf reelle Signale bezogenen Fouriertransformation hergestellt (siehe [Hi]). Stellvertretend seinen

an dieser Stelle auch die Arbeiten von [Ell] und [BHS] genannt, wobei man speziell in der Arbeit [BHS] einen genauen Überblick über den historischen Verlauf findet. Bei den verschiedenen Zugängen sind verschiedene Eigenschaften der Exponentialfunktion von Interesse und immer dann, wenn andere Schwerpunkte gesetzt werden, ändern sich auch die Anforderungen an die Fouriertransformation. Die hier vorgestellten Resultate sind als ausbaufähige Anregungen zu verstehen, die auf den in dieser Arbeit geschaffenen Grundlagen beruhen. Das Hauptaugenmerk im Kapitel 4 wird auf der Theorie monogener Funktionen liegen, um einige der grundlegenden Ideen übertragen zu können.

4.1 Hyperkomplexe Exponentialfunktion

4.1.1 Problemstellung und historische Einordnung

Zunächst soll auf einige wichtige Begriffe aus der Clifford- Algebra eingegangen werden. Danach werden die Eigenschaften formuliert, welche die hier angestrebte hyperkomplexe Exponentialfunktion erfüllen soll. Abschließend soll das Problem historisch eingeordnet und von einer Vielzahl bereits bekannter Resultate abgegrenzt werden.

Es sei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n . Die Clifford- Algebra $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ ist die freie Algebra über \mathbb{R}^n , die modulo der Relation

$$x^2 = -|x|^2 \mathbf{e}_0,$$

aufgebaut wird. Dabei ist \mathbf{e}_0 das Einselement in $\mathcal{C}\ell_{0,n}$. In der Algebra $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ gelten die nichtkommutativen Multiplikationsregeln

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = -2\delta_{ij} \mathbf{e}_0,$$

wobei mit δ_{ij} das Kroneckersymbol bezeichnet wird. Jedes Element x aus \mathbb{R}^n kann in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

dargestellt werden. Auf diese Weise wird der Euklidische Raum \mathbb{R}^n mit dem Raum $\wedge^1 \mathcal{C}\ell_{0,n}$ identifiziert, der aus allen Vektoren aus $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ besteht. Ebenso identifiziert man \mathbb{R}^{n+1} mit $\wedge^0 \mathcal{C}\ell_{0,n} \oplus \wedge^1 \mathcal{C}\ell_{0,n}$, dem Raum aller Paravektoren in $\mathcal{C}\ell_{0,n}$.

Im folgenden werden Funktionen $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}$ betrachtet. Diese Funktionen können in der Form

$$f = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \mathbf{e}_A f_A$$

mit reellen Koordinaten f_A geschrieben werden. Dabei sei $\text{Sc}f = f_\emptyset$ der Realteil von f und $\vec{f} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i f_i$ der vektorielle Anteil von f . Mengen differenzierbarer Funktionen $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{C}\ell_{0,n})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, können sowohl koordinatenweise als auch direkt betrachtet werden. Diese Mengen sind $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ -bi-Module. Im Spezialfall $n = 2$ identifiziert man wie üblich $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ mit den Quaternionen \mathbb{H} und arbeitet in rechts- bzw. linkslinearen Vektorräumen.

Es sei $D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ der verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Operator und $\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ der dazu adjungierte Operator. Diese Operatoren sind hyperkomplexe Analoga zu den komplexen Cauchy-Riemann-Operatoren $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial z}$. Auch im höherdimensionalen Fall gilt $D\overline{D} = \Delta_{n+1}$, wobei mit Δ_{n+1} der Laplaceoperator über dem \mathbb{R}^{n+1} bezeichnet wird. Im folgenden wird mitunter auch auf den Dirac-Operator $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $\mathcal{D}^2 = -\Delta_n$ Bezug genommen.

Man nennt eine Funktion $f : \Omega \mapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *linksmonogen*, wenn für jedes $x \in \Omega$ die Gleichung $(Df)(x) = 0$ erfüllt ist. Auf analoge Weise werden rechtsmonogene Funktionen definiert. Wesentliche Eigenschaften des verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operators, des Dirac-Operators sowie der linksmonogenen Funktionen findet man in [BDS] und [GS2].

Im Hinblick auf die Exponentialfunktion wird eine hyperkomplexe Ableitung der monogenen Funktionen benötigt. Indem die entsprechenden Resultate für quaternionenwertige Funktionen aus [Sud] und [MS] verallgemeinert wurden, konnte in [GM] gezeigt werden, dass $\frac{1}{2}\overline{D}$ als eine solche Ableitung monogener Funktionen im \mathbb{R}^{n+1} für beliebiges n aufgefasst werden kann.

Gesucht wird im folgenden nach einer Exponentialfunktion, die monogen ist, keine Nullstellen besitzt und die reelle Exponentialfunktion $\exp(x_0)$ auf den Fall \mathbb{R}^{n+1} erweitert. Bezüglich x_1, \dots, x_n soll diese Funktion periodisch sein. Schließlich soll sie mit ihrer Ableitung übereinstimmen und somit die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\overline{D} \text{EXP}(x_0, \dots, x_n) = \text{EXP}(x_0, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

erfüllen.

Begonnen wird im Abschnitt 4.1.2 mit der Konstruktion einer Exponentialfunktion im Raum \mathbb{R}^3 . Zusätzlich zu diesem Fall der paravektorwertigen Funktionen in $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ wird im Abschnitt 4.1.3 der Fall quaternionenwertiger Funktionen, definiert im \mathbb{R}^4 , betrachtet. Da sich dieser Fall von der Situation im \mathbb{R}^3 und auch vom allgemeinen Fall paravektorwertiger Funktionen unterscheidet, wird das allgemeine Ergebnis für $n > 3$ ($f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \wedge^0 \mathcal{C}\ell_{0,n} \oplus \wedge^1 \mathcal{C}\ell_{0,n}$) im Abschnitt 4.1.4 vorgestellt.

Im folgenden wird ein historischer Überblick gegeben, um die gesuchte Exponentialfunktion mit den oben beschriebenen Eigenschaften gezielt einordnen zu können:

Erste Schritte, um die Eigenschaft der Monogenität elementarer Funktionen ausgehend von der komplexen Analysis zu erzielen, gehen auf Fueter zurück (siehe [Fue1], [Fue2] und [Fue3]). Grundidee dieser Arbeiten war die Einführung einer Abbildung der komplex analytischen Funktionen auf monogene Funktionen. Wendet man diese Methode auf die komplexe Exponentialfunktion e^z an, so erhält man eine erste Verallgemeinerung. Diese Idee wurde später von vielen Autoren weiterentwickelt (siehe beispielsweise die Arbeiten [Sce], [Sud], [Ma], [Som1], [Som2], [Lou] und [JS]). Einen umfassenden Überblick dazu findet man in der Arbeit [Spr1], wo solche Ideen genutzt werden, um mit Hilfe der Fueter-Sce-Methode radial monogene Funktionen zu konstruieren. Insbesondere ist in dieser Arbeit auch eine Exponentialfunktion enthalten.

Durch Erweiterung der Idee der konjugiert harmonischen Funktionen aus der komplexen Analysis wird in [Sud] gezeigt, dass ausgehend von einer gegebenen reellwertigen harmonischen Funktion mit Hilfe der Beziehung

$$f(q) = u(q) + 2 \mathbf{Vec} \int_0^1 s^2 \overline{Du}(sq) q \, ds, \quad q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

eine monogene Funktion konstruiert werden kann. Diese Herangehensweise wurde genutzt, um Verallgemeinerungen reellwertiger elementarer Funktionen wie beispielsweise der Logarithmus- und Tangensfunktion zu definieren.

Ein anderer Zugang basiert auf Erweiterungen. Unter der Voraussetzung, dass eine holomorphe Funktion im \mathbb{R}^2 oder eine monogene Funktion im \mathbb{R}^n ($n > 2$) gegeben ist, wird nach einer monogenen Erweiterung dieser Funktion in den Raum \mathbb{R}^{n+1} gesucht. Diese Idee basiert auf der Cauchy-Kowalewski-Erweiterung und wird beispielsweise in den Artikeln [Som1] und [Som2] sowie im Buch [BDS] ausführlich beschrieben.

Als einen durchaus natürlichen Zugang kann man die Definition einer verallgemeinerten Exponentialfunktion mit Hilfe ihrer Potenzreihenentwicklung ansehen. Dies wird in der Arbeit [GS2] sowie in vielen anderen Quellen deutlich. Allerdings sind auf Grund der nichtkommutativen Multiplikation in der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}_{0,n}$ die Potenzen der Vektoren bzw. Paravektoren x nicht monogen und auch die daraus resultierende Exponentialfunktion ist nicht monogen.

Im Raum \mathbb{R}^4 existieren verschiedene weitere Ideen. In der Arbeit [Ronn] wird das Konzept der bikomplexen Zahlen genutzt, um die komplexe Analysis auf den \mathbb{R}^4 zu verallgemeinern. Auch eine Exponentialfunktion wird durch

$$\begin{aligned} e(x_0, x_1, x_2, x_3) = & e^{x_0} (\cos x_1 \cos x_2 \cosh x_3 + \sin x_1 \sin x_2 \sinh x_3 \\ & + \mathbf{i} e^{x_0} (\sin x_1 \cos x_2 \cosh x_3 - \cos x_1 \sin x_2 \sinh x_3) \\ & + \mathbf{j} e^{x_0} (\cos x_1 \sin x_2 \cosh x_3 - \sin x_1 \cos x_2 \sinh x_3) \\ & + \mathbf{k} e^{x_0} (\sin x_1 \sin x_2 \cosh x_3 + \cos x_1 \cos x_2 \sinh x_3) \end{aligned} \quad (4.2)$$

beschrieben.

Wie bereits erwähnt steht bei der Suche nach einer Exponentialfunktion immer die Frage im Mittelpunkt, welche Eigenschaften diese besitzen soll. Zunächst soll sie monogen sein. Die Definition der Exponentialfunktion über eine Funktionalgleichung basiert auf der Eigenschaft $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. Es ist unschwer einzusehen, dass innerhalb der Theorie der Clifford-Analysis diese Eigenschaft nicht für allgemeine Argumente gelten wird. Eine ausführliche Antwort auf diese Fragen findet man in [GN1]. Schränkt man die Exponentialfunktion aus dem \mathbb{R}^{n+1} ein, so erwartet man, dass sie die reelle Exponentialfunktion e^x erweitert und (falls möglich) für $n = 1$ Übereinstimmungen mit der komplexen Funktion e^z zeigt. Die Exponentialfunktion sollte ferner überall verschieden von Null sein und im "Imaginärteil" periodisch. Ein interessantes Beispiel ist die Funktion

$$\exp(x) = e^{x_1 + \dots + x_n} [\cos(x_0 \sqrt{n}) \mathbf{e}_0 + (-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)) \sin(x_0 \sqrt{n})]$$

aus [Som1, BDS]. Sie wurde konstruiert durch monogene Erweiterung der Funktion $\exp(\vec{x}) = e^{x_1 + \dots + x_n}$. Hinsichtlich ihrer Eigenschaften gilt $\exp(0) = 1$, sie besitzt keine Nullstellen und erweitert die reelle Exponentialfunktion. Darüber hinaus ist sie die einzige verallgemeinerte Exponentialfunktion, die der Bedingung

$$\exp(x + y) = \exp(x) * \exp(y)$$

genügt. Dabei kommt die Tatsache zum Tragen, dass es im Prinzip nur eine imaginäre Einheit gibt. Auch hier sei auf die Arbeit [GN1] verwiesen. Nicht erfüllt ist die Differentialgleichung (4.1) und die Periodizitätseigenschaft in Imaginärteilrichtung. Übrigens erfüllen alle bisher kommentierten Exponentialfunktionen die Periodizitätsbedingung nicht, denn sowohl die durch Erweiterung entstandenen Funktionen als auch die in [Ronn] betrachtete Funktion zeigen wenigstens in einer Imaginärteilrichtung ein exponentielles Verhalten. In [Spr1] wird eine radial monogene Funktion $\text{EXP}_k(x)$, $n = 2k + 1$ im \mathbb{R}^{n+1} beschrieben, die für $k = 1$ die Gestalt

$$\text{EXP}_1(x) = e^{x_0} \left[\frac{\sin |\underline{x}|}{|\underline{x}|} + w \left(\frac{\sin |\underline{x}| - |\underline{x}| \cos |\underline{x}|}{|\underline{x}|^2} \right) \right]$$

besitzt mit $\underline{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ und der variablen imaginären Einheit $\omega = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$.

Diese Funktion enthält keinen Exponenten in Bezug auf x_1, x_2, x_3 , aber strebt in allen imaginären Richtungen gegen Null. Im Hinblick auf die Anforderungen an eine Exponentialfunktion als wichtiger Bestandteil einer verallgemeinerten Fouriertransformation wird hier nach einer Exponentialfunktion gesucht, die im Unendlichen nicht verschwindet.

Eine wichtige Eigenschaft der reellen und komplexen Exponentialfunktion besteht darin, dass sie Lösung der Differentialgleichung

$$f' = f, f(0) = 1 \tag{4.3}$$

ist. Betrachtet man die hyperkomplexe Ableitung $\frac{1}{2}\overline{D}$, wie sie in [Sud], [MS] und [GM] eingeführt wurde, so wird nach einer monogenen Exponentialfunktion gesucht, welche die Gleichung

$$\frac{1}{2}\overline{D}f = f, f(0) = 1 \quad (4.4)$$

erfüllt. Die bekannten Exponentialfunktionen, die durch die Cauchy-Kowalewski-Erweiterung entstehen, erfüllen die Gleichung (4.4) nicht. Diese Aussage trifft auch auf die Funktion

$$f(x, y, z, w) = e^x (\cos y + i \sin y) (\cos z + j \sin z) (\cos w + k \sin w)$$

aus der Arbeit [Som2] zu. Hingegen erfüllt die EXP_1 -Funktion, die in [Spr1] betrachtet wird, die Differentialgleichung (4.4) und sie besitzt zusätzlich die Eigenschaft

$$\frac{1}{2}\overline{D} \text{EXP}_1(\lambda x) = \lambda \text{EXP}_1(\lambda x), \quad (4.5)$$

aber nur für reelle Zahlen λ . Um die Möglichkeit offen zu lassen, auch (gewöhnliche) Differentialgleichungen bezüglich der Ableitung $\frac{1}{2}\overline{D}$ zu betrachten, soll nach Exponentialfunktionen gesucht werden, welche die Eigenschaft (4.5) für allgemeineres λ besitzen.

Vor kurzem wurden in [FM] Potenzreihenentwicklungen mit Appell-Polynomen genutzt, um Verallgemeinerungen der reellwertigen Exponentialfunktion zu definieren, die Lösung der Differentialgleichung $\frac{1}{2}\overline{D}u = u$ sind. In der Arbeit [CFM] wird die Idee verwendet, um eine monogene Sinus- und Cosinusfunktion als Lösung der Gleichung $(\frac{1}{2}\overline{D})^2 u = -u$ zu definieren. Allerdings ist die in dieser Arbeit angegebene Lösung der hyperkomplexen Differentialgleichung bedingt durch ein Vorzeichenproblem nicht monogen.

4.1.2 Konstruktion einer Exponentialfunktion im \mathbb{R}^3

Gesucht wird nach einer quaternionenwertigen Funktion $u = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$, die von x_0, x_1, x_2 abhängt und die Eigenschaften

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = 0 \quad (4.6)$$

und

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = (u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \quad (4.7)$$

besitzt.

Satz 4.1.1 Wenn $u^* = u^*(x_1, x_2)$ Lösung der Gleichung

$$\left(-\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(u_0^* + u_1^* \mathbf{e}_1 + u_2^* \mathbf{e}_2 + u_3^* \mathbf{e}_3) = u_0^* + u_1^* \mathbf{e}_1 + u_2^* \mathbf{e}_2 + u_3^* \mathbf{e}_3 \quad (4.8)$$

ist, dann ist die quaternionenwertige Funktion $u(x_0, x_1, x_2) := e^{x_0} u^*(x_1, x_2)$ eine Lösung der Gleichungen (4.6) und (4.7).

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus den Rechenschritten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \pm \mathcal{D} \right) u(x_0, x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, x_1, x_2) \mp \frac{1}{2} \left(-\mathcal{D} \right) u^*(x_1, x_2) e^{x_0} \\ &= \frac{1}{2} u(x_0, x_1, x_2) \mp \frac{1}{2} u^*(x_1, x_2) e^{x_0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Untersucht wird nun die Gleichung (4.8) koordinatenweise:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* = u_0^* \quad (4.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_0^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_3^* = -u_1^* \quad (4.8b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} u_3^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_0^* = -u_2^* \quad (4.8c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_2^* - \frac{\partial}{\partial x_2} u_1^* = -u_3^*. \quad (4.8d)$$

Indem man (4.8a) und (4.8d) in die Gleichung (4.8b) einsetzt, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_0^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_3^* = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} u_2^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_1^* \right) = -u_1^*.$$

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$\Delta u_1^* = -u_1^* \quad \text{mit} \quad \Delta u_1^* = \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^2} \quad (4.9)$$

geschrieben werden. Setzt man (4.8a) und (4.8d) in Gleichung (4.8c) ein, so folgt

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} u_3^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_0^* = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} u_2^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_1^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* \right) = -u_2^*$$

und schließlich

$$\Delta u_2^* = -u_2^*. \quad (4.10)$$

Somit kann die Exponentialfunktion mit Hilfe gewisser Eigenfunktionen des Laplaceoperators im \mathbb{R}^2 konstruiert werden. Diese Eigenfunktionen sind nicht eindeutig, so

dass die Möglichkeit besteht, zusätzliche Bedingungen zu stellen: In Analogie zum reellen und komplexen Fall soll

$$u(0, 0, 0) = 1 \quad (4.11)$$

gefordert werden. Im Hinblick darauf, dass die Exponentialfunktion in x_1 - und x_2 -Richtung periodisch sein soll, wird der allgemeine Ansatz

$$\begin{aligned} u_1^* &= A \sin(\alpha x_1) \cos(\beta x_2) \\ u_2^* &= B \cos(\gamma x_1) \sin(\delta x_2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit konstanten Koeffizienten $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ und δ betrachtet. Aus den Gleichungen (4.9) und (4.10) erhält man zunächst

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe des Ansatzes (4.12) folgt aus den Gleichungen (4.8a) and (4.8d)

$$u_0^* = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* = A \alpha \cos(\alpha x_1) \cos(\beta x_2) + B \delta \cos(\gamma x_1) \cos(\delta x_2)$$

und

$$u_3^* = -\frac{\partial}{\partial x_1} u_2^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_1^* = B \gamma \sin(\gamma x_1) \sin(\delta x_2) - A \beta \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2).$$

Zusätzlich wird in Verbindung mit der Beziehung (4.11) $A\alpha + B\delta = 1$ gefordert.

Indem man sich nun auf den Spezialfall $\alpha = \beta = \gamma = \delta = A = B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ beschränkt, erhält man

$$\begin{aligned} u : \quad \text{EXP}(x_0, x_1, x_2) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_2 \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass diese Funktion die Gleichungen (4.6) and (4.7) erfüllt. Der Zusammenhang zur reellen und komplexen Exponentialfunktion wird durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{EXP}(0, 0, 0) &= 1 \\ \text{EXP}(x_0, 0, 0) &= e^{x_0} \\ \text{EXP}(x_0, x_1, 0) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x_1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_1 \right) \\ \text{EXP}(x_0, 0, x_2) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_2 \right) \end{aligned}$$

deutlich. Auf Grund der Eigenschaft

$$\text{EXP}\left(0, x_1 + \frac{4k\pi}{\sqrt{2}}, x_2 + \frac{4k\pi}{\sqrt{2}}\right) = \text{EXP}(0, x_1, x_2) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ist die hier betrachtete Exponentialfunktion periodisch mit der Periode $4\pi/\sqrt{2}$.

Bemerkung 1: Wenn man andererseits mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} u_1^* &= A \sin(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ u_2^* &= B \sin(\gamma x_1 + \delta x_2) \end{aligned}$$

startet und den Spezialfall $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A = \frac{\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta}$ und $B = \frac{\beta}{\alpha\gamma + \beta\delta}$ betrachtet, dann erhält man die Exponentialfunktion

$$u(x_0, x_1, x_2) = e^{x_0} \left(\cos \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right).$$

In dieser Darstellung sind die Komponenten, die zu den Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 gehören, nicht unabhängig voneinander. Man kann die Funktion als Einbettung einer komplex-wertigen Funktion in die Algebra der Quaternionen betrachten. Aus diesem Grund soll der erste Ansatz bevorzugt werden.

Bemerkung 2: Im allgemeinen können die Gleichungen (4.9) und (4.10) mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Diese Möglichkeit wurde bereits in [GHS] benutzt, um eine quaternionenwertige Exponentialfunktion zu konstruieren. Die Idee dazu wurde in Zusammenarbeit mit den Autoren Malonek und Gürlebeck erarbeitet.

4.1.3 Eine Exponentialfunktion vom \mathbb{R}^4 in den \mathbb{R}^4

Es wird wieder die Funktion $u(x) = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ betrachtet und nach einer Lösung der Gleichungen

$$\frac{1}{2}Du = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathcal{D}\right)u = 0 \quad (4.15)$$

und

$$\frac{1}{2}\overline{D}u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathcal{D}\right)u = u \quad (4.16)$$

gesucht.

Satz 4.1.2 *Erfüllt die quaternionenwertige Funktion $u^* = u^*(x_1, x_2, x_3)$ die Gleichung*

$$\mathcal{D}u^*(x_1, x_2, x_3) = -u^*(x_1, x_2, x_3), \quad (4.17)$$

so ist $u(x_0, x_1, x_2, x_3) = e^{x_0}u^(x_1, x_2, x_3)$ Lösung der Gleichungen (4.15) und (4.16).*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in Analogie zum Beweis von 4.1.1.

Untersucht wird nun das System (4.17). Auch hier ist es möglich, u_1^* , u_2^* und u_3^* zu eliminieren. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$\Delta u_1^* = -u_1^*, \quad \Delta u_2^* = -u_2^*, \quad \text{und} \quad \Delta u_3^* = -u_3^*.$$

Zusätzlich soll $u(0, 0, 0, 0) = 1$ gefordert werden. Wählt man insbesondere

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \\ u_2^* &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \\ u_3^* &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

dann erhält man

$$u_0^* = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3^* = \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} - \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}.$$

Durch einfaches Nachrechnen überzeugt man sich leicht, dass

$$\begin{aligned} u : &= \text{EXP}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \\ &e^{x_0} \left[\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} - \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right. \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\left. + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned}$$

eine Lösung der Gleichungen (4.15) und (4.16) ist. In Bezug auf die Eigenschaften der Funktion gilt

$$\begin{aligned} \text{EXP}(0, 0, 0, 0) &= 1 \\ \text{EXP}(x_0, 0, 0, 0) &= e^{x_0} \\ \text{EXP}(x_0, x_1, 0, 0) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_1 \right) \\ \text{EXP}(x_0, 0, x_2, 0) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_2 \right) \\ \text{EXP}(x_0, 0, 0, x_3) &= e^{x_0} \left(\cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{e}_3 \right). \end{aligned}$$

Außerdem besitzt die Exponentialfunktion keine Nullstellen, da

$$\begin{aligned} & |\text{EXP}(x_0, x_1, x_2, x_3)|^2 \\ &= e^{2x_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos^2 \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos^2 \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin^2 \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin^2 \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Abschließend sei vermerkt, dass die hier konstruierte Exponentialfunktion sehr anschaulich mit der Funktion $e(x_0, x_1, x_2, x_3)$ der bikomplexen Algebra in Formel (4.2) verglichen werden kann. Definiert man

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right) \quad \text{und} \quad \bar{d} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right)$$

unter Verwendung der Einheitsvektoren \mathbf{i}, \mathbf{j} und \mathbf{k} , so erhält man die Beziehungen

$$d \odot e(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \bar{d} \odot e(x_0, x_1, x_2, x_3) = e(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Dabei steht das Symbol \odot für die Multiplikation in der bikomplexen Algebra. Betont sei, dass trotz der Anteile $\cosh(x_3)$ und $\sinh(x_3)$ in der Exponentialfunktion $e(x_0, x_1, x_2, x_3)$ diese Funktion nicht das gewünschte Verhalten im Unendlichen aufweist.

Im Hinblick auf die Anwendung der hier konstruierten Exponentialfunktion bei der Lösung von Differentialgleichungen ist es wichtig, Kenntnisse über das Verhalten von $\text{EXP}(x \cdot \lambda)$ bzw. $\text{EXP}(\lambda \cdot x)$ zu besitzen. Für reelle Zahlen λ gilt

$$\frac{1}{2} \bar{D} \text{EXP}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda \text{EXP}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Ist $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3$ ein Quaternion, dann kann man sich durch die ausführliche Berechnung davon überzeugen, dass die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{EXP}(x \cdot \lambda) D &= 0 \\ \frac{1}{2} \bar{D} \text{EXP}(x \cdot \lambda) &= \lambda \cdot \text{EXP}(x \cdot \lambda) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D \text{EXP}(\lambda \cdot x) &= 0 \\ \frac{1}{2} \text{EXP}(\lambda \cdot x) \bar{D} &= \text{EXP}(\lambda \cdot x) \cdot \lambda \end{aligned}$$

erfüllt sind. Wie üblich steht das Symbol "·" für die Quaternionenmultiplikation. Besonders hervorzuheben ist, dass die Ausdrücke

$$\lambda \cdot \text{EXP}(x \cdot \lambda) \quad \text{und} \quad \text{EXP}(\lambda \cdot x) \cdot \lambda$$

bi-monogene Funktionen sind. Dies ist nicht offensichtlich, da der Raum der links-monogenen Funktionen in der Regel nur ein rechtslinearer Raum ist.

4.1.4 Der allgemeine Fall mit $n + 1$ Variablen für $n > 3$

Es sei $u = u(x_0, \dots, x_n) = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$ eine paravektorwertige Funktion mit $u : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto Cl_{0,n}$. Gesucht wird nach monogenen Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathcal{D} \right) u = u. \quad (4.18)$$

Satz 4.1.3 *Ist die Funktion $u^* = u_0^* + u_1^* \mathbf{e}_1 + \dots + u_n^* \mathbf{e}_n$ nur von den Variablen x_1, \dots, x_n abhängig und erfüllt sie die Gleichung*

$$\mathcal{D}u^* = -u^*, \quad (4.19)$$

dann ist $u = e^{x_0} u^$ eine monogene Lösung der Gleichung (4.18).*

Der Beweis von Satz 4.1.1 und Satz 4.1.2 kann unmittelbar übertragen werden.

Die Koordinaten von u^* erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_n^* = u_0^* \quad (4.20)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} u_0^* = u_i^* \quad i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} u_j^* + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^* = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (4.22)$$

Als Erweiterung des Falles $n = 3$ definiert man

$$u_0^* = \prod_{i=1}^n \cos \frac{x_i}{\sqrt{n}} - \prod_{i=1}^3 \sin \frac{x_i}{\sqrt{n}} \prod_{i=4}^n \cos \frac{x_i}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad u_j^* = -\frac{\partial}{\partial x_j} u_0^*, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Gleichungen (4.21) sind somit offensichtlich erfüllt. Aus Gleichung (4.20) folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^* + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_n^* = -\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x_n^2} = n \frac{1}{n} u_0^* = u_0^*.$$

Schließlich sind auch die Gleichungen (4.22) erfüllt, da

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} u_j^* + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^* = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_0^* - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u_0^* = 0.$$

4.2 Sinus- und Cosinusfunktion im höherdimensionalen Fall

In diesem Abschnitt wird eine monogene Erweiterung der Sinus- und Cosinusfunktion vorgestellt. Darüber hinaus werden die Eigenschaften der Funktionen studiert. Die gesuchte Sinus- und Cosinusfunktion soll die Differentialgleichung $(\frac{1}{2}\bar{D})^2 u = -u$ erfüllen. Darüber hinaus soll die erste hyperkomplexe Ableitung der Sinusfunktion zur Cosinusfunktion führen, während die Ableitung der Cosinusfunktion die negative monogene Sinusfunktion ergibt. Als dritte Eigenschaft interessiert der Zusammenhang zwischen der Sinus- und Cosinusfunktion und der im Abschnitt 4.1 betrachteten monogenen Exponentialfunktion.

Als Ausgangspunkt wird die klassische Situation im Raum \mathbb{R}^{n+1} mit $n = 1$ betrachtet. Es sei

$$\text{SIN}(x_0, x_1) = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} \sin(x_0) + i \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \cos(x_0)$$

und

$$\text{COS}(x_0, x_1) = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} \cos(x_0) - i \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \sin(x_0).$$

Aus diesen Definitionen resultieren die bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{COS}(x_0, x_1) + i \text{SIN}(x_0, x_1) &= e^{-x_1} \cos(x_0) + i e^{-x_1} \sin(x_0) = e^{i(x_0 + ix_1)} \\ &:= \text{EXP}_0(-x_1, x_0) + i \text{EXP}_1(-x_1, x_0) \end{aligned} \quad (4.23)$$

und

$$\text{COS}^2(x_0, x_1) + \text{SIN}^2(x_0, x_1) = 1. \quad (4.24)$$

Zusätzlich haben beide Funktionen die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \text{SIN}(x_0, x_1) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \text{SIN}(x_0, x_1) &= \text{COS}(x_0, x_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \text{COS}(x_0, x_1) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \text{COS}(x_0, x_1) &= -\text{SIN}(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Folglich gilt $\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} \text{SIN}(x_0, x_1) = -\text{SIN}(x_0, x_1)$. Unter Verwendung der Schreibweise

$$e^{x_0 + ix_1} = e^{x_0} (\cos(x_1) + i \sin(x_1)) = \text{EXP}_0(x_0, x_1) + i \text{EXP}_1(x_0, x_1)$$

beweist man das Additionstheorem

$$\begin{aligned} & EXP_0(x_0 + y_0, x_1 + y_1) + i EXP_1(x_0 + y_0, x_1 + y_1) \\ &= (EXP_0(x_0, x_1) + i EXP_1(x_0, x_1)) (EXP_0(y_0, y_1) + i EXP_1(y_0, y_1)). \end{aligned}$$

Auf der Grundlage dieses Konzeptes sucht man nach einer Sinus- und Cosinusfunktion im Fall $n+1 > 2$. Die Eigenschaften dieser Funktionen werden im weiteren diskutiert.

Im Fall $n = 2$ sucht man nach monogenen Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} u(x_0, x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_0, x_1, x_2, 0) \\ &= -u(x_0, x_1, x_2, 0). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Satz 4.2.1 *Die Funktion*

$$\begin{aligned} & \text{SIN}(x_0, x_1, x_2, 0) = \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \sin(x_0) \\ &+ \frac{e_1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cos(x_0) \\ &+ \frac{e_2}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cos(x_0) \\ &:= \text{SIN}_0(x_0, x_1, x_2, 0) + e_1 \text{SIN}_1(x_0, x_1, x_2, 0) + e_2 \text{SIN}_2(x_0, x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

ist monogen und erfüllt die Gleichung 4.25.

Diese Funktion kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen konstruiert werden.

Satz 4.2.2 *Als zweite Lösung der Gleichung 4.25 mit der Zusatzbedingung $u(0, 0, 0, 0) = 1$ erhält man*

$$\begin{aligned} & \text{COS}(x_0, x_1, x_2, 0) = \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cos(x_0) \\ &- \frac{e_1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \sin(x_0) \\ &- \frac{e_2}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \sin(x_0) \\ &:= \text{COS}_0(x_0, x_1, x_2, 0) + e_1 \text{COS}_1(x_0, x_1, x_2, 0) + e_2 \text{COS}_2(x_0, x_1, x_2, 0). \end{aligned}$$

Zwischen beiden Funktionen gilt die Beziehung

$$\frac{1}{2}\overline{D} \text{ SIN}(x_0, x_1, x_2, 0) = \text{COS}(x_0, x_1, x_2, 0).$$

Während die Sinusfunktion mit der in der Arbeit [CFM] definierten Funktion übereinstimmt, unterscheidet sich die hier angegebene Cosinusfunktion von der in [CFM] betrachteten Funktion durch zwei Vorzeichen. Diese Vorzeichen sind entscheidend für die Eigenschaften der Funktion.

Auf der Grundlage der Sätze 4.2.1 und 4.2.2 erhält man die Eigenschaft

$$\text{COS}^2(x_0, x_1, x_2, 0) + \text{SIN}^2(x_0, x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cosh(\sqrt{2}x_1) + \frac{1}{4} \cosh(\sqrt{2}x_2).$$

Zum nächsten Resultat gelangt man ebenfalls durch einfache Berechnungen. Es zeigt, dass auch im Fall \mathbb{R}^3 ein Analogon zur Eulerschen Form existiert, wenn auch hier die zu den Basisvektoren e_1 und e_2 gehörenden Komponenten nicht unabhängig voneinander sind.

Satz 4.2.3 *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \text{COS}(x_0, x_1, x_2, 0) + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \text{SIN}(x_0, x_1, x_2, 0) \\ & + \text{COS}(x_0, x_2, x_1, 0) + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \text{SIN}(x_0, x_2, x_1, 0) \\ & = \left[\text{EXP}_0\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}x_0, x_2\right) + (e_1 + e_2) \text{EXP}_1\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}x_0, x_2\right) \right] \frac{\cosh \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{\cos \frac{x_2}{\sqrt{2}}} \\ & + \left[\text{EXP}_0\left(-\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1, \sqrt{2}x_0\right) + (e_1 + e_2) \text{EXP}_1\left(-\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_1, \sqrt{2}x_0\right) \right] \frac{\cosh \frac{x_1}{\sqrt{2}}}{\cos \frac{x_1}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Formuliert wird nun ein Additionstheorem. Ausgehend von Formel 4.14 erhält man

$$\begin{aligned} & \text{EXP}(x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ & = e^{x_0 + y_0} \left(\cos\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{e_1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right) \right) \\ & = e^{x_0 + y_0} \left(\cos\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e_2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1 + y_1 - x_2 - y_2}{\sqrt{2}}\right) \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des folgenden Lemmas vereinfacht man die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite.

Lemma 4.2.1 *Für die Exponentialfunktion gilt*

$$\begin{aligned}
& e^{x_0+y_0} \left(\cos \left(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x_2+y_2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x_2+y_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \\
&= \left(e^{x_0} \cos \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} e^{x_0} \sin \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \\
&\cdot \left(e^{y_0} \cos \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} e^{y_0} \sin \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \frac{\cos \left(\frac{x_2+y_2}{\sqrt{2}} \right)}{\cos \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}} \right)}
\end{aligned}$$

Beweis: Man berechnet das Produkt auf der rechten Seite. Dabei ergeben die Komponenten bezüglich e_3 Null. Schließlich nutzt man die bekannten Additionstheoreme für $\cos(x_i + y_i)$ und $\sin(x_i + y_i)$ mit $i = 1, 2$ ■

Indem man in Lemma 4.2.1 die zwei Faktoren auf der rechten Seite mit Hilfe der Exponentialfunktion in Formel 4.14 ausdrückt, erhält das Additionstheorem die Gestalt

$$\begin{aligned}
& EXP(x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&= \left(EXP(x_0, x_1, x_2) + \frac{e_2}{\sqrt{2}} e^{x_0} \sin \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \\
&\cdot \left(EXP(y_0, y_1, y_2) + \frac{e_2}{\sqrt{2}} e^{y_0} \sin \left(\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \frac{\cos \left(\frac{x_2+y_2}{\sqrt{2}} \right)}{\cos \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}} \right)} \\
&- \frac{e_2}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{x_1 + y_1 - x_2 - y_2}{\sqrt{2}} \right) \cdot e^{x_0+y_0}.
\end{aligned}$$

Betrachtet wird nun den Raum \mathbb{R}^4 . Man sucht nach monogenen Funktionen mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} u(x_0, x_1, x_2, x_3) = -u(x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (4.26)$$

Satz 4.2.4 *Im Raum \mathbb{R}^4 hat die Sinusfunktion die Gestalt*

$$\text{SIN}(x) = \text{SIN}_0(x) + e_1 \text{SIN}_1(x) + e_2 \text{SIN}_2(x) + e_3 \text{SIN}_3(x)$$

mit $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ und

$$\begin{aligned}
\text{SIN}_0(x) &= \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \sin x_0, \\
\text{SIN}_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \cos x_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SIN}_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \cos x_0, \\ \text{SIN}_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \cos x_0.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rechenregeln in der Quaternionenalgebra beweist man, dass diese Funktion monogen ist und die Gleichung 4.26 erfüllt.

Satz 4.2.5 *Die Komponenten der Cosinusfunktion*

$$\text{COS}(x) = \text{COS}_0(x) + e_1 \text{COS}_1(x) + e_2 \text{COS}_2(x) + e_3 \text{COS}_3(x)$$

sind die Funktionen

$$\begin{aligned}\text{COS}_0(x) &= \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \cos x_0, \\ \text{COS}_1(x) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \sin x_0, \\ \text{COS}_2(x) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \sin x_0, \\ \text{COS}_3(x) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cosh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_3}{\sqrt{3}} + \sinh \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sinh \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cosh \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \sin x_0.\end{aligned}$$

Die Sinus- und Cosinusfunktion besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$\frac{1}{2} \bar{D} \text{SIN}(x) = \text{COS}(x) \quad \text{und} \quad \text{COS}^2(x) + \text{SIN}^2(x) = \frac{1}{3} \left(\cosh \frac{2x_1}{\sqrt{3}} + \cosh \frac{2x_2}{\sqrt{3}} + \cosh \frac{2x_3}{\sqrt{3}} \right).$$

Man untersucht nun, wie das Analogon zur Eulerschen Form im \mathbb{R}^4 aussieht. Dazu werden die Komponenten der Exponentialfunktion in die folgenden zwei Anteile zerlegt:

$$\begin{aligned}\text{EXP}_0(x) &:= \text{EXP}_0^A(x) + \text{EXP}_0^B(x) \\ &= \left(e^{x_0} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) + \left(-e^{x_0} \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right), \\ \text{EXP}_1(x) &:= \text{EXP}_1^A(x) + \text{EXP}_1^B(x) \\ &= \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right), \\ \text{EXP}_2(x) &:= \text{EXP}_2^A(x) + \text{EXP}_2^B(x) \\ &= \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right), \\ \text{EXP}_3(x) &:= \text{EXP}_3^A(x) + \text{EXP}_3^B(x) \\ &= \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

Durch Vertauschen von x_1, x_2, x_3 in der Sinus- und Cosinusfunktion erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\cos(x_0, x_1, x_2, x_3) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_1, x_2, x_3) \right. \\
& + \cos(x_0, x_1, x_3, x_2) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_1, x_3, x_2) \\
& + \cos(x_0, x_2, x_1, x_3) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_2, x_1, x_3) \\
& + \cos(x_0, x_2, x_3, x_1) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_2, x_3, x_1) \\
& + \cos(x_0, x_3, x_2, x_1) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_3, x_2, x_1) \\
& \left. + \cos(x_0, x_3, x_1, x_2) + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \sin(x_0, x_3, x_1, x_2) \right] \\
& = [EXP_0^A(-\frac{x_1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}x_0, x_2, x_3) + (e_1 + e_2 + e_3)EXP_1^A(-\frac{x_1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}x_0, x_2, x_3)] \frac{\cosh \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}}}{\cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}}} \\
& + [EXP_0^A(-\frac{x_2}{\sqrt{3}}, x_1, \sqrt{3}x_0, x_3) + (e_1 + e_2 + e_3)EXP_1^A(-\frac{x_2}{\sqrt{3}}, x_1, \sqrt{3}x_0, x_3)] \frac{\cosh \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{3}}}{\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}}} \\
& + [EXP_0^A(-\frac{x_3}{\sqrt{3}}, x_1, x_2, \sqrt{3}x_0) + (e_1 + e_2 + e_3)EXP_1^A(-\frac{x_3}{\sqrt{3}}, x_1, x_2, \sqrt{3}x_0)] \frac{\cosh \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}}{\cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

Abschließend wird nach einem Additionstheorem im Raum \mathbb{R}^4 gesucht. In Analogie zur Situation im \mathbb{R}^3 schreibt man

$$\begin{aligned}
& EXP(x + y) \\
& = EXP_0(x + y) + e_1 EXP_1(x + y) + e_2 EXP_2(x + y) + e_3 EXP_3(x + y) \\
& = EXP_0(x + y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1(x + y) \\
& \quad - e_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{x_0 + y_0} \sin\left(\frac{x_1 + y_1 - x_2 - y_2}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_3 + y_3}{\sqrt{3}}\right) \\
& \quad - e_3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{x_0 + y_0} \sin\left(\frac{x_1 + y_1 - x_3 - y_3}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2 + y_2}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des folgenden Lemmas können die ersten zwei Summanden auf der rechten Seite vereinfacht werden.

Lemma 4.2.2 *Es gilt*

$$\begin{aligned}
& EXP_0(x + y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1(x + y) \\
& = (EXP_0^A(x) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^A(x)) \\
& \quad \cdot \left[(EXP_0^A(y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^A(y)) \frac{\cos \frac{x_3 + y_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2 + y_2}{\sqrt{3}}}{2 \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{y_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{y_3}{\sqrt{3}}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (EXP_0^B(y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^B(y)) \frac{\sin \frac{x_3+y_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2+y_2}{\sqrt{3}}}{2 \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{y_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{y_3}{\sqrt{3}}} \Bigg] \\
& + (EXP_0^B(x) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^B(x)) \\
& \cdot \left[(EXP_0^A(y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^A(y)) \frac{\sin \frac{x_3+y_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2+y_2}{\sqrt{3}}}{2 \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{y_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{y_3}{\sqrt{3}}} \right. \\
& \left. + (EXP_0^B(y) + (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^B(y)) \frac{-\cos \frac{x_3+y_3}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2+y_2}{\sqrt{3}}}{2 \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{y_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{y_3}{\sqrt{3}}} \right].
\end{aligned}$$

Beweis: Die rechte Seite kann mit Hilfe der Rechenregeln in der Quaternionenalgebra sowie den Additionstheoremen für $\sin(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{3}})$ und $\cos(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{3}})$ ausgewertet werden ■

Vermerkt sei, dass in Lemma 4.2.2 die folgenden Umformungen möglich sind:

$$\begin{aligned}
& (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^A(x) \\
& = e_1 EXP_1^A(x) + e_2 EXP_2^A(x) + e_3 EXP_3^A(x) \\
& + \frac{e_2}{\sqrt{3}} e^{x_0} \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{e_3}{\sqrt{3}} e^{x_0} \sin\left(\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (e_1 + e_2 + e_3) EXP_1^B(x) \\
& = e_1 EXP_1^B(x) + e_2 EXP_2^B(x) + e_3 EXP_3^B(x) \\
& - \frac{e_2}{\sqrt{3}} e^{x_0} \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{3}}\right) - \frac{e_3}{\sqrt{3}} e^{x_0} \sin\left(\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dabei kann das Argument x auch durch y ersetzt werden.

4.3 Anwendung der Exponentialfunktion und eine hyperkomplexe Fouriertransformation

Im Abschnitt 4.3.1 werden Resultate über Fourierreihen im komplexen Fall zusammengetragen und erläutert, wie man zu einem Ausgangspunkt für die Übertragung auf den quaternionischen Fall gelangt. Im Abschnitt 4.3.2 werden Fourierreihen vorgestellt, die auf dem Quaternionenprodukt $m \cdot \bar{x}$ beruhen. Die Eigenschaften der Fourierkoeffizienten werden anschließend im Abschnitt 4.3.3 analysiert. Bedingt durch die Nichtkommutativität der Quaternionenmultiplikation erhält man jedoch

keine Darstellungsformel für die Fourierkoeffizienten, wie dies zu Beginn im komplexen Fall möglich war. Aus diesem Grund soll im Abschnitt 4.3.4 das Modell vereinfacht werden, indem Fourierreihen für periodische und monogene Funktionen betrachtet werden, die auf der Multiplikation zwischen x und dem **skalaren** Faktor m_0 beruhen. In diesem Zusammenhang wird die Besselsche Ungleichung bewiesen. Im Abschnitt 4.3.5 werden schließlich Fourierreihen für periodische, aber im allgemeinen nichtmonogene Funktionen betrachtet. Dabei wird ein erster Ansatz für die Definition einer Fouriertransformation diskutiert. Zwei Beispiele beweisen die Anwendbarkeit der Methode. Abschließend wird eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Integrale angegeben.

4.3.1 Zusammenfassung der Resultate im komplexen Fall

Im Komplexen werden gewöhnlich die Fourierreihen

$$f(x_0, x_1) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbf{Z}^2} \alpha(m_0, m_1) e^{i(m_0 x_0 + m_1 x_1)}$$

betrachtet. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f(x_0, x_1) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbf{Z}^2} \alpha(m_0, m_1) i(m_0 + i m_1) e^{i(m_0 x_0 + m_1 x_1)}$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f(x_0, x_1) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbf{Z}^2} \alpha(m_0, m_1) i(m_0 - i m_1) e^{i(m_0 x_0 + m_1 x_1)}$$

erfüllt sind. Die Fourierkoeffizienten werden nach der Vorschrift

$$\alpha(k_0, k_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0, x_1) e^{-i(k_0 x_0 + k_1 x_1)} dx_0 dx_1$$

berechnet. Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f(x_0, x_1) \right) e^{-i(k_0 x_0 + k_1 x_1)} dx_0 dx_1 \\ &= i(k_0 + i k_1) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0, x_1) e^{-i(k_0 x_0 + k_1 x_1)} dx_0 dx_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f(x_0, x_1) \right) e^{-i(k_0 x_0 + k_1 x_1)} dx_0 dx_1 \\ &= i(k_0 - i k_1) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0, x_1) e^{-i(k_0 x_0 + k_1 x_1)} dx_0 dx_1. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind beispielsweise dann von Interesse, wenn eine Laplacegleichung mit Hilfe der obigen Integralmethode gelöst werden soll.

Das Ziel ist es, ein Analogon zu dieser Transformation im quaternionischen Fall zu finden. Dazu soll die Exponentialfunktion aus dem Abschnitt 4.1.3 mit den Eigenschaften

$$D \cdot EXP(m \cdot x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} EXP(m \cdot x) \cdot \bar{D} = EXP(m \cdot x) \cdot m$$

genutzt werden, wobei $D = \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\bar{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ und $m = m_0 + m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3$ gilt.

Das Symbol " \cdot " steht auch hier wieder für das Quaternionenprodukt. Diese quaternionenwertige Exponentialfunktion ist vergleichbar mit der komplexen Funktion

$$f_1(x_0, x_1) = e^{i(m_0 + im_1)(x_0 + ix_1)} = e^{-(m_1 x_0 + m_0 x_1)} e^{i(m_0 x_0 - m_1 x_1)},$$

welche die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f_1(x_0, x_1) &= 0 \quad \text{und} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f_1(x_0, x_1) &= i(m_0 + im_1) f_1(x_0, x_1) \end{aligned}$$

besitzt. Interessant ist nun der Zusammenhang zwischen der Funktion $f_1(x_0, x_1)$ und der Funktion $f_2(x_0, x_1) = e^{i(m_0 x_0 + m_1 x_1)}$, die als Faktor in der Fourierreihe steht. Nutzt man die Schreibweise $exp(x_0, x_1) = e^{x_0 + ix_1}$, dann gilt

$$f_1 = exp(-m_1 x_0 - m_0 x_1, m_0 x_0 - m_1 x_1) \quad \text{und} \quad f_2 = exp(0, \text{Im}(im\bar{x})),$$

wobei $\text{Im}(im\bar{x})$ der Imaginärteil des Produktes $im\bar{x} = i(m_0 + im_1)(x_0 - ix_1)$ ist. Aus diesen Überlegungen kann ein Ansatz für eine Fourierreihe im quaternionischen Fall abgeleitet werden.

4.3.2 Fourierreihen im quaternionischen Fall, die auf dem Produkt $m \cdot \bar{x}$ beruhen

Um eine Fourierreihe zu konstruieren, wird auf der Funktion $f_2(x_0, x_1)$ aufgebaut. Dabei soll lediglich der Faktor i weggelassen werden.

Lemma 4.3.1 *Die Fourierreihe*

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x}))$$

mit

$$\text{Vec}(m \cdot \bar{x}) = \begin{pmatrix} m_1 x_0 - m_0 x_1 + m_3 x_2 - m_2 x_3 \\ m_2 x_0 - m_3 x_1 - m_0 x_2 + m_1 x_3 \\ m_3 x_0 + m_2 x_1 - m_1 x_2 - m_0 x_3 \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}^T$$

und

$$\text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) = \begin{pmatrix} \cos \frac{A_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_3}{\sqrt{3}} - \sin \frac{A_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{A_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_3}{\sqrt{3}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{A_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_3}{\sqrt{3}} + \sin \frac{A_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_3}{\sqrt{3}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_3}{\sqrt{3}} + \cos \frac{A_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{A_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{A_3}{\sqrt{3}} \right) \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenschaft

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot D = \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \left(\text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot m \right).$$

Beweis: Auf Grund des Assoziativgesetzes der Quaternionenmultiplikation gilt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot D &= \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4} \left(\alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \right) \cdot D \\ &= \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \left(\text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot D \right). \end{aligned}$$

Durch unmittelbare Berechnung der Ausdrücke zeigt man schließlich die Gültigkeit der Beziehung $\text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot D = \text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot m$ ■

Im nächsten Schritt wird zusätzlich der Operator \bar{D} von rechts angewandt:

Lemma 4.3.2 *Für die Fourierreihe*

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x}))$$

gilt

$$(f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot D) \cdot \bar{D} = - \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^4} |m|^2 \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \text{EXP}(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})).$$

Beweis: Auf Grund des Assoziativgesetzes bezüglich der Multiplikation und Lemma 4.3.1 erhält man

$$(f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot D) \cdot \bar{D}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} \left(\alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \left(EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot D \right) \right) \cdot \bar{D} \\
&= \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \left(\left(EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot D \right) \cdot \bar{D} \right) \\
&= \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot \left(\left(EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot m \right) \cdot \bar{D} \right).
\end{aligned}$$

Schließlich weist man mittels Rechnung nach, dass

$$\left(EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot m \right) \cdot \bar{D} = -|m|^2 EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x}))$$

mit $|m|^2 = m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ gilt ■

Im folgenden werden die Operatoren D und \bar{D} von links angewandt.

Lemma 4.3.3 *Die Fourierreihe*

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3)$$

besitzt die Eigenschaften

$$\bar{D} \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) = - \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} \left(\bar{m} \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \right) \cdot \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3)$$

und

$$D \cdot \left(\bar{D} \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) \right) = - \sum_{(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4} |m|^2 EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \cdot \alpha(m_0, m_1, m_2, m_3).$$

Der Beweis dieses Lemmas beruht auf den Beziehungen

$$\bar{D} \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) = -\bar{m} \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x}))$$

und

$$D \cdot \left(-\bar{m} \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \right) = -|m|^2 EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})).$$

4.3.3 Eigenschaften der Fourierkoeffizienten

Es sei $m = (m_0, m_1, m_2, m_3)$ und $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$. Ferner sei definiert

$$\begin{aligned}
&\text{Vec}(m \cdot \bar{x}) - \text{Vec}(k \cdot \bar{x}) \\
&= \begin{pmatrix} (m_1 - k_1)x_0 - (m_0 - k_0)x_1 + (m_3 - k_3)x_2 - (m_2 - k_2)x_3 \\ (m_2 - k_2)x_0 - (m_3 - k_3)x_1 - (m_0 - k_0)x_2 + (m_1 - k_1)x_3 \\ (m_3 - k_3)x_0 + (m_2 - k_2)x_1 - (m_1 - k_1)x_2 - (m_0 - k_0)x_3 \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Lemma 4.3.4 *Die Fourierkoeffizienten besitzen die Eigenschaft*

$$\begin{aligned}\alpha(k) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi}\right)^4 \int_{x_0=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_1=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_2=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_3=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m) \cdot EXP(0, B_1, B_2, B_3) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m) \cdot EXP\left(0, \frac{6\pi B_1}{\sqrt{3}}, \frac{6\pi B_2}{\sqrt{3}}, \frac{6\pi B_3}{\sqrt{3}}\right) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3,\end{aligned}$$

wobei Summation und Integration komponentenweise zu verstehen sind.

Beweis: Benutzt wird die Kurzschreibweise

$$EXP\left(0, \frac{6\pi B_1}{\sqrt{3}}, \frac{6\pi B_2}{\sqrt{3}}, \frac{6\pi B_3}{\sqrt{3}}\right) = (EXP_0, EXP_1, EXP_2, EXP_3).$$

Auf Grund der Quaternionenmultiplikation genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EXP_0 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \begin{cases} 1 & \text{wenn } m = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EXP_i dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad \forall m, k \quad i = 1, 2, 3 \text{ gilt.}$$

Zunächst schreibt man den ersten Integranden um:

$$\begin{aligned}EXP_0 &= (\cos(2\pi B_1) \cos(2\pi B_2) \cos(2\pi B_3) - \sin(2\pi B_1) \sin(2\pi B_2) \sin(2\pi B_3)) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 2\pi(B_1 + B_2 - B_3) + \cos 2\pi(B_2 + B_3 - B_1) + \cos 2\pi(B_3 + B_1 - B_2) \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\pi(B_1 + B_2 + B_3) - \sin 2\pi(B_1 + B_2 - B_3) - \sin 2\pi(B_2 + B_3 - B_1) \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\pi(B_3 + B_1 - B_2) + \sin 2\pi(B_1 + B_2 + B_3) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) + \cos 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) + \cos 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) - \sin 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) + \sin 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \right)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_{10} &= m_1 - k_1 + m_2 - k_2 - m_3 + k_3 & u_{20} &= m_2 - k_2 + m_3 - k_3 - m_1 + k_1 \\
u_{11} &= -m_0 + k_0 - m_3 + k_3 - m_2 + k_2 & u_{21} &= -m_3 + k_3 + m_2 - k_2 + m_0 - k_0 \\
u_{12} &= m_3 - k_3 - m_0 + k_0 + m_1 - k_1 & u_{22} &= -m_0 + k_0 - m_1 + k_1 - m_3 + k_3 \\
u_{13} &= -m_2 + k_2 + m_1 - k_1 + m_0 - k_0 & u_{23} &= m_1 - k_1 - m_0 + k_0 + m_2 - k_2 \\
\\
u_{30} &= m_1 - k_1 + m_3 - k_3 - m_2 + k_2 & u_{40} &= m_1 - k_1 + m_2 - k_2 + m_3 - k_3 \\
u_{31} &= -m_0 + k_0 + m_2 - k_2 + m_3 - k_3 & u_{41} &= -m_0 + k_0 - m_3 + k_3 + m_2 - k_2 \\
u_{32} &= m_3 - k_3 - m_1 + k_1 + m_0 - k_0 & u_{42} &= m_3 - k_3 - m_0 + k_0 - m_1 + k_1 \\
u_{33} &= -m_2 + k_2 - m_0 + k_0 - m_1 + k_1 & u_{43} &= -m_2 + k_2 + m_1 - k_1 - m_0 + k_0.
\end{aligned}$$

Für alle Sinusintegrale gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \sin 2\pi(u_{i0}x_0 + u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \left(\sin 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \right. \\
&\quad - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad + \cos 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad - \cos 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad + \cos 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad + \cos 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad \left. - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \right) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da in jedem Summand mindestens eine Sinusfunktion enthalten ist. Man wiederholt die Berechnungen nun für die Cosinusintegrale:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \cos 2\pi(u_{i0}x_0 + u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \left(\cos 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \right. \\
&\quad - \cos 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad + \sin 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \\
&\quad \left. - \sin 2\pi u_{i0}x_0 \cos 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \sin 2\pi u_{i2}x_2 \cos 2\pi u_{i3}x_3 \\
& -\cos 2\pi u_{i0}x_0 \sin 2\pi u_{i1}x_1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 \sin 2\pi u_{i3}x_3) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& = \int_{x_0=0}^1 \cos 2\pi u_{i0}x_0 dx_0 \int_{x_1=0}^1 \cos 2\pi u_{i1}x_1 dx_1 \int_{x_2=0}^1 \cos 2\pi u_{i2}x_2 dx_2 \int_{x_3=0}^1 \cos 2\pi u_{i3}x_3 dx_3.
\end{aligned}$$

Das erhaltene Produkt ist nur im Fall $u_{i0} = u_{i1} = u_{i2} = u_{i3} = 0$ verschieden von Null. Diese Eigenschaft ist genau dann gleichzeitig für alle $i = 1, \dots, 4$ erfüllt, wenn $m = k$ gilt. Daraus kann man schlußfolgern

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EX P_0 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1 & \text{wenn } m = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog wird nun der zweite Integrand untersucht. Es gilt:

$$\begin{aligned}
EX P_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin(2\pi B_1) \cos(2\pi B_2) \cos(2\pi B_3) + \cos(2\pi B_1) \sin(2\pi B_2) \sin(2\pi B_3)) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\sin 2\pi(B_1 + B_2 - B_3) - \sin 2\pi(B_2 + B_3 - B_1) + \sin 2\pi(B_3 + B_1 - B_2) \right. \\
&\quad + \sin 2\pi(B_1 + B_2 + B_3) + \cos 2\pi(B_1 + B_2 - B_3) - \cos 2\pi(B_2 + B_3 - B_1) \\
&\quad \left. + \cos 2\pi(B_3 + B_1 - B_2) - \cos 2\pi(B_1 + B_2 + B_3) \right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\sin 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) - \sin 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \right. \\
&\quad + \sin 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) + \sin 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \\
&\quad + \cos 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) - \cos 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \\
&\quad \left. + \cos 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) - \cos 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \right).
\end{aligned}$$

In diesem Fall kann gefolgert werden

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EX P_1 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}}(1 - 1 + 1 - 1) = 0 & m = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die letzten beiden Integranden haben die Struktur

$$\begin{aligned}
EX P_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(2\pi B_1) \sin(2\pi B_2) \cos(2\pi B_3) + \sin(2\pi B_1) \cos(2\pi B_2) \sin(2\pi B_3)) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\sin 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) + \sin 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \right. \\
&\quad - \sin 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) + \sin 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \\
&\quad + \cos 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) + \cos 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \\
&\quad \left. - \cos 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) - \cos 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 EXP_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin(2\pi B_1) \sin(2\pi B_2) \cos(2\pi B_3) + \cos(2\pi B_1) \cos(2\pi B_2) \sin(2\pi B_3)) \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(-\cos 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) + \cos 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \right. \\
 &\quad + \cos 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) - \cos 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \\
 &\quad - \sin 2\pi(u_{10}x_0 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3) + \sin 2\pi(u_{20}x_0 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3) \\
 &\quad \left. + \sin 2\pi(u_{30}x_0 + u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) + \sin 2\pi(u_{40}x_0 + u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3) \right).
 \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EXP_2 \, dx_0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}}(1 + 1 - 1 - 1) = 0 & m = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 EXP_3 \, dx_0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}}(-1 + 1 + 1 - 1) = 0 & m = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Lemma 4.3.4 ist vollständig bewiesen ■

Folgerung 4.3.1 *Im Fall $k = 0$ erhält man aus Lemma 4.3.4 und der Definition der Fourierreihen im Abschnitt 4.3.2 die Beziehung*

$$\begin{aligned}
 \alpha(0) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^4 \int_{x_0=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_1=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_2=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_3=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \alpha(m) \cdot EXP(0, \text{Vec}(m \cdot \bar{x})) \, dx_0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^4 \int_{x_0=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_1=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_2=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_3=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f(x_0, x_1, x_2, x_3) \, dx_0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.
 \end{aligned}$$

4.3.4 Fourierreihen für periodische monogene Funktionen basierend auf der Multiplikation von x mit dem skalaren Faktor m_0

Man definiert

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \alpha(m_0, x_0) \cdot EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3)$$

mit den Quaternionen $EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3) = (EXP_0, EXP_1, EXP_2, EXP_3)$ und $\alpha(m_0, x_0) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Lemma 4.3.5 Die Eigenschaft $f \cdot D = 0$ ist erfüllt, wenn die Fourierkoeffizienten Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_0} = m_0 \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} = m_0 \alpha_1, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_0} = m_0 \alpha_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_0} = m_0 \alpha_3 \quad \text{sind.}$$

In diesem Fall schreibt man $\alpha_0(m_0, x_0) = \alpha_0(m_0) e^{m_0 x_0}$, $\alpha_1(m_0, x_0) = \alpha_1(m_0) e^{m_0 x_0}$, $\alpha_2(m_0, x_0) = \alpha_2(m_0) e^{m_0 x_0}$ und $\alpha_3(m_0, x_0) = \alpha_3(m_0) e^{m_0 x_0}$.

Bemerkung: Es gilt

$$e^{m_0 x_0} EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3) = EXP(m_0 x_0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3),$$

da anstelle des Produktes $m \cdot \bar{x}$ in diesem Abschnitt das Argument x mit dem konstanten Faktor m_0 multipliziert wird.

Berechnet werden nun die Fourierkoeffizienten unter der Voraussetzung, dass die Funktion periodisch mit der Periode $T = \frac{6\pi}{\sqrt{3}}$ ist.

Lemma 4.3.6 Die Fourierkoeffizienten besitzen die Eigenschaft

$$\alpha(k_0, x_0) = \kappa \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_{x_1=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_2=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_3=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{EXP(0, k_0 x_1, k_0 x_2, k_0 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \kappa \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f(x_0, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_1, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_2, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_3) \cdot \overline{EXP(0, k_0 \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_1, k_0 \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_2, k_0 \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

mit $\kappa = 2$ wenn $k_0 \neq 0$ und $\kappa = 1$ wenn $k_0 = 0$.

Beweis: Es sei $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$. Auf Grund der Quaternionenmultiplikation sind Integrale über alle Produkte $f_i EXP_j$ mit $i, j \in \{0, \dots, 3\}$ zu untersuchen. Die Berechnungen werden im Fall $i = j = 0$ vorgeführt:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_0(x_0, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_1, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_2, \frac{6\pi}{\sqrt{3}} x_3) \left(\cos 2\pi k_0 x_1 \cos 2\pi k_0 x_2 \cos 2\pi k_0 x_3 \right. \\ & \quad \left. - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \alpha_0(m_0, x_0) \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \left(\cos 2\pi m_0 x_1 \cos 2\pi m_0 x_2 \cos 2\pi m_0 x_3 \right. \\ & \quad \left. - \sin 2\pi m_0 x_1 \sin 2\pi m_0 x_2 \sin 2\pi m_0 x_3 \right) \left(\cos 2\pi k_0 x_1 \cos 2\pi k_0 x_2 \cos 2\pi k_0 x_3 \right. \\ & \quad \left. - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \Big) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& - \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \alpha_1(m_0, x_0) \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(\sin 2\pi m_0 x_1 \cos 2\pi m_0 x_2 \cos 2\pi m_0 x_3 \\
& + \cos 2\pi m_0 x_1 \sin 2\pi m_0 x_2 \sin 2\pi m_0 x_3 \Big) \Big(\cos 2\pi k_0 x_1 \cos 2\pi k_0 x_2 \cos 2\pi k_0 x_3 \\
& - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \Big) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& - \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \alpha_2(m_0, x_0) \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(\cos 2\pi m_0 x_1 \sin 2\pi m_0 x_2 \cos 2\pi m_0 x_3 \\
& + \sin 2\pi m_0 x_1 \cos 2\pi m_0 x_2 \sin 2\pi m_0 x_3 \Big) \Big(\cos 2\pi k_0 x_1 \cos 2\pi k_0 x_2 \cos 2\pi k_0 x_3 \\
& - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \Big) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& - \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \alpha_3(m_0, x_0) \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(\sin 2\pi m_0 x_1 \sin 2\pi m_0 x_2 \cos 2\pi m_0 x_3 \\
& + \cos 2\pi m_0 x_1 \cos 2\pi m_0 x_2 \sin 2\pi m_0 x_3 \Big) \Big(\cos 2\pi k_0 x_1 \cos 2\pi k_0 x_2 \cos 2\pi k_0 x_3 \\
& - \sin 2\pi k_0 x_1 \sin 2\pi k_0 x_2 \sin 2\pi k_0 x_3 \Big) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& = \begin{cases} \frac{1}{4} \alpha_0(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ \alpha_0(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für alle anderen Integrale erhält man auf analoge Weise

$$\begin{aligned}
\int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_i \operatorname{EXP}_i dx_1 dx_2 dx_3 &= \begin{cases} \frac{1}{12} \alpha_0(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \\
\int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_i \operatorname{EXP}_0 dx_1 dx_2 dx_3 &= \begin{cases} \frac{1}{4} \alpha_i(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ \alpha_i(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \\
- \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_0 \operatorname{EXP}_i dx_1 dx_2 dx_3 &= \begin{cases} \frac{1}{12} \alpha_i(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \\
\int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_3 \operatorname{EXP}_2 dx_1 dx_2 dx_3 &= - \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_2 \operatorname{EXP}_3 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \begin{cases} \frac{1}{12} \alpha_1(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_1 EXP_3 dx_1 dx_2 dx_3 &= - \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_3 EXP_1 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\quad \begin{cases} \frac{1}{12} \alpha_2(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases}, \\
\int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_2 EXP_1 dx_1 dx_2 dx_3 &= - \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_1 EXP_2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\quad \begin{cases} \frac{1}{12} \alpha_3(k_0, x_0) & \text{wenn } k_0 \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } k_0 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Regeln für das Quaternionenprodukt ist das Lemma vollständig bewiesen ■

4.3.4.1 Die Besselsche Ungleichung

Ausgehend von der Fourierreihe

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{m_0 \in \mathbf{Z}} \alpha(m_0, x_0) \cdot EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3)$$

mit den Faktoren $EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3) = (EXP_0, EXP_1, EXP_2, EXP_3)$ und $\alpha(m_0, x_0) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ werden die trigonometrischen Polynome

$$\begin{aligned}
S_0^n &= \sum_{m_0=-n}^n \alpha_0 EXP_0 - \alpha_1 EXP_1 - \alpha_2 EXP_2 - \alpha_3 EXP_3, \\
S_1^n &= \sum_{m_0=-n}^n \alpha_1 EXP_0 + \alpha_0 EXP_1 - \alpha_3 EXP_2 + \alpha_2 EXP_3, \\
S_2^n &= \sum_{m_0=-n}^n \alpha_2 EXP_0 + \alpha_3 EXP_1 + \alpha_0 EXP_2 - \alpha_1 EXP_3 \quad \text{und} \\
S_3^n &= \sum_{m_0=-n}^n \alpha_3 EXP_0 - \alpha_2 EXP_1 + \alpha_1 EXP_2 + \alpha_0 EXP_3
\end{aligned}$$

betrachtet. Um die mittlere Approximation zu charakterisieren, definiert man

$$\delta_n = \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \left((f_0 - S_0^n)^2 + (f_1 - S_1^n)^2 + (f_2 - S_2^n)^2 + (f_3 - S_3^n)^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Zunächst soll nur den Summand $(f_0 - S_0^n)^2$ untersucht werden. Indem man alle Terme vernachlässigt, die auf Grund der Orthogonalität der Sinus- und Cosinusfunktion

Null werden, erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0 - S_0^n)^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f_0^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& - 2 \sum_{m_0=-n}^n \alpha_0 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f_0 EX P_0 dx_1 dx_2 dx_3 + 2 \sum_{m_0=-n}^n \alpha_1 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f_0 EX P_1 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + 2 \sum_{m_0=-n}^n \alpha_2 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f_0 EX P_2 dx_1 dx_2 dx_3 + 2 \sum_{m_0=-n}^n \alpha_3 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f_0 EX P_3 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \sum_{m_0=-n}^n \alpha_0^2 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_0^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \sum_{m_0=-n}^n \alpha_1^2 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_1^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \sum_{m_0=-n}^n \alpha_2^2 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \sum_{m_0=-n}^n \alpha_3^2 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_3^2 dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Vermerkt sei, dass gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_0^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \left(\frac{6\pi}{\sqrt{3}} \right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{18\pi^3}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \\
& \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_1^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& = \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EX P_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \left(\frac{6\pi}{\sqrt{3}} \right)^3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{6\pi^3}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Indem die Berechnungen für die Ausdrücke $(f_i - S_i^n)^2$, $i = 1, 2, 3$ wiederholt werden und die quadratische Ergänzung sowie die Beziehung $\frac{18\pi^3}{\sqrt{3}} + 3 \frac{6\pi^3}{\sqrt{3}} = \frac{36\pi^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{6\pi}{\sqrt{3}} \right)^3$ verwendet wird, erhält man

$$\begin{aligned}
& \delta_n = \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \sum_{m_0=-n}^n \left(\sqrt{\frac{36\pi^3}{\sqrt{3}}} \alpha_0 - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{36\pi^3}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0 EX P_0 + f_1 EX P_1 + f_2 EX P_2 + f_3 EX P_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& - \frac{\sqrt{3}}{36\pi^3} \sum_{m_0=-n}^n \left(\int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0 EX P_0 + f_1 EX P_1 + f_2 EX P_2 + f_3 EX P_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m_0=-n}^n \left(\sqrt{\frac{36\pi^3}{\sqrt{3}}} \alpha_1 - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{36\pi^3}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_1 EXP_0 - f_0 EXP_1 + f_3 EXP_2 - f_2 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& \quad - \frac{\sqrt{3}}{36\pi^3} \sum_{m_0=-n}^n \left(\int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_1 EXP_0 - f_0 EXP_1 + f_3 EXP_2 - f_2 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& + \sum_{m_0=-n}^n \left(\sqrt{\frac{36\pi^3}{\sqrt{3}}} \alpha_2 - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{36\pi^3}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_2 EXP_0 - f_3 EXP_1 - f_0 EXP_2 + f_1 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& \quad - \frac{\sqrt{3}}{36\pi^3} \sum_{m_0=-n}^n \left(\int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_2 EXP_0 - f_3 EXP_1 - f_0 EXP_2 + f_1 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& + \sum_{m_0=-n}^n \left(\sqrt{\frac{36\pi^3}{\sqrt{3}}} \alpha_3 - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{36\pi^3}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_3 EXP_0 + f_2 EXP_1 - f_1 EXP_2 - f_0 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2 \\
& \quad - \frac{\sqrt{3}}{36\pi^3} \sum_{m_0=-n}^n \left(\int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_3 EXP_0 + f_2 EXP_1 - f_1 EXP_2 - f_0 EXP_3) dx_1 dx_2 dx_3 \right)^2.
\end{aligned}$$

Den Minimalwert δ_h^{min} erzielt man konkret für die Fourierkoeffizienten

$$\alpha(m_0, x_0) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{EXP(0, m_0 x_1, m_0 x_2, m_0 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

und da $\delta_n \geq 0$ gilt, ergibt sich

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \geq \sum_{m_0=-n}^n (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Aus dieser Ungleichung folgt die *Besselsche Ungleichung*

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \geq \sum_{m_0 \in \mathbf{Z}} (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

4.3.5 Fourierreihen für periodische aber im allgemeinen nicht monogene Funktionen

Als Verallgemeinerung des Abschnittes 4.3.4 werden die Fourierreihen

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^3} \alpha(m_1, m_2, m_3, x_0) \cdot EXP(0, m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3)$$

betrachtet und die Quaternionen in der Form $\alpha(m_1, m_2, m_3, x_0) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $EXP(0, m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3) = (EXP_0, EXP_1, EXP_2, EXP_3)$ geschrieben.

Lemma 4.3.7 *Die Fourierkoeffizienten besitzen die Eigenschaft*

$$\begin{aligned} & \alpha(k_1, k_2, k_3, x_0) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_{x_1=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_2=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_{x_3=0}^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{EXP(0, k_1x_1, k_2x_2, k_3x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= 2 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f(x_0, \frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_1, \frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_2, \frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_3) \cdot \overline{EXP(0, k_1\frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_1, k_2\frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_2, k_3\frac{6\pi}{\sqrt{3}}x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Beim Beweis des Lemmas sind alle Beweisschritte von Lemma 4.3.6 zu übertragen.

Lemma 4.3.8 *(Besselsche Ungleichung)*

Die Funktion $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^3} \alpha(m_1, m_2, m_3, x_0) \cdot EXP(0, m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3)$$

erfüllt die Besselsche Ungleichung

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6\pi} \right)^3 \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \geq \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^3} (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Der Beweis beruht unmittelbar auf den Ideen aus dem Abschnitt 4.3.4. Betrachtet werden trigonometrische Polynome und man nutzt die folgenden Eigenschaften:

Für festes n_i , $i = 1, 2, 3$ und ein beliebiges Element $(k_1, k_2, k_3) \in Q = \{(k_1, k_2, k_3) : k_i \in \mathbf{Z}, -n_i \leq k_i \leq n_i, i = 1, 2, 3\}$ ist die Gleichung

$$\sum_{(m_1, m_2, m_3) \in Q^*} \alpha_j(m_1, m_2, m_3, x_0) \alpha_j(k_1, k_2, k_3, x_0) \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EXP_j^{[m_1, m_2, m_3]} EXP_j^{[k_1, k_2, k_3]} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

erfüllt, wobei $Q^* = \{(m_1, m_2, m_3) \in Q : (m_1 \neq k_1) \vee (m_2 \neq k_2) \vee (m_3 \neq k_3) \text{ und } j = 0, \dots, 3 \text{ gilt}\}$. Weiterhin erhält man für $j, l \in 0, \dots, 3$ und $j \neq l$

$$\sum_{(m_1, m_2, m_3) \in Q} \alpha_j(m_1, m_2, m_3, x_0) \alpha_l(k_1, k_2, k_3, x_0) \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} \int_0^{\frac{6\pi}{\sqrt{3}}} EXP_j^{[m_1, m_2, m_3]} EXP_l^{[k_1, k_2, k_3]} dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Der obere Index in den Komponenten der Exponentialfunktion $[k_1, k_2, k_3]$ bezieht sich dabei auf die Bezeichnung $EXP(0, k_1x_1, k_2x_2, k_3x_3)$.

4.3.5.1 Eine heuristische Methode zur Einführung der Fouriertransformation

Bisher wurden periodische Funktionen mit der Periode $T = \frac{6\pi}{\sqrt{3}}$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ untersucht. Um nichtperiodische Funktionen studieren zu können, soll der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ und $\omega_0 \rightarrow 0$ betrachtet werden. Die Fourierkoeffizienten in Lemma 4.3.7 enthalten nicht nur den Faktor $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in den Sinus- und Cosinusfunktionen, sondern auch die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vor den Komponenten EXP_1 , EXP_2 und EXP_3 , die nicht mit dem periodischen Verhalten zusammenhängen. Auch der Vorfaktor 2, der im Beweis von Lemma 4.3.6 und Lemma 4.3.7 eine wichtige Rolle spielt, hängt mit dem Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{3}}$, aber nicht mit der Periodizität zusammen. Alle diese Terme, die nicht das periodische Verhalten charakterisieren, werden im folgenden als Konstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 bezeichnet. Wird die Fouriertransformation genauer untersucht, sind diese Koeffizienten zu bestimmen. Anhand der nachfolgenden zwei Beispiele gewinnt man den Eindruck, dass $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$ gelten muss.

In Anlehnung an Lemma 4.3.7 sei

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3} \alpha(m_1, m_2, m_3, x_0) \cdot EXP(0, m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3) \\
 &= \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3} \left\{ C_1 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_0^T \int_0^T \int_0^T f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{EXP(0, m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \right\} \\
 &\quad \cdot EXP(0, m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3) \omega_0^3 \\
 &= \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3} \left\{ C_1 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP(0, m_1 y_1, m_2 y_2, m_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \right\} \\
 &\quad \cdot EXP(0, m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3) \omega_0^3.
 \end{aligned}$$

Man substituiert $\omega_i = m_i \omega_0$ und $\Delta \omega_i = (m_i + 1) \omega_0 - m_i \omega_0 = \omega_0$ für $i = 1, 2, 3$ und erhält die Gleichung

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= \sum_{\substack{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3 \\ \omega_i = m_i \Delta \omega_i}} \left\{ C_1 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \right\} \\
 &\quad \cdot EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) (\Delta \omega_i)^3
 \end{aligned}$$

mit

$$EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 x_1 \cos \omega_2 x_2 \cos \omega_3 x_3 - \sin \omega_1 x_1 \sin \omega_2 x_2 \sin \omega_3 x_3 \\ C_2 \left(\sin \omega_1 x_1 \cos \omega_2 x_2 \cos \omega_3 x_3 + \cos \omega_1 x_1 \sin \omega_2 x_2 \sin \omega_3 x_3 \right) \\ C_3 \left(\cos \omega_1 x_1 \sin \omega_2 x_2 \cos \omega_3 x_3 + \sin \omega_1 x_1 \cos \omega_2 x_2 \sin \omega_3 x_3 \right) \\ C_4 \left(\sin \omega_1 x_1 \sin \omega_2 x_2 \cos \omega_3 x_3 + \cos \omega_1 x_1 \cos \omega_2 x_2 \sin \omega_3 x_3 \right) \end{pmatrix}.$$

Durch den Grenzübergang $\Delta\omega_i = \omega_0 \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$ und somit $T \rightarrow \infty$ gelangt man zur Darstellungsformel

$$\begin{aligned} & f(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_1 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \right\} \\ & \quad \cdot EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \end{aligned}$$

Beispiel 1: Als einfachstes Beispiel soll das Fourierintegral der Funktion

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)}$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Beziehungen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega_i x_i)}{1 + x_i^2} dx_i = \frac{\pi}{2} e^{-|\omega_i|} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{x_i \sin(\omega_i x_i)}{1 + x_i^2} dx_i = \frac{\omega_i}{|\omega_i|} \frac{\pi}{2} e^{-|\omega_i|}$$

erhält man im Fall $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 = (\alpha, 0, 0, 0)^T$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{8} e^{-|\omega_1|} e^{-|\omega_2|} e^{-|\omega_3|} \left(x_0 - \frac{\omega_1}{|\omega_1|} - \frac{\omega_2}{|\omega_2|} - \frac{\omega_3}{|\omega_3|} \right).$$

Die Rücktransformation mit obiger Integralformel ist möglich.

Beispiel 2: Beschrieben wird die Fouriertransformation des Cauchykerens

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3}{(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

Indem man auch hier $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$ setzt, erhält man

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 = (\beta, 0, 0, 0)^T$$

mit

$$\beta = \frac{1}{8\pi} e^{-|x_0| \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}} \left(\frac{x_0}{|x_0|} - \frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}} \right).$$

Für diese Berechnungen werden die Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x \sin(ax) dx}{(b^2 + x^2)^2} &= \frac{\pi}{4b} a e^{-ab} \quad a > 0, b > 0 \\ \int_0^\infty \frac{\cos(ax) dx}{(b^2 + x^2)^2} &= \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab) e^{-ab} \quad a > 0, b > 0 \\ \int_0^\infty \frac{e^{-\beta \sqrt{\gamma^2 + x^2}}}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \cos(bx) dx &= K_0(\gamma \sqrt{\beta^2 + b^2}) \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0, b > 0 \\ \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta(\gamma^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\gamma^2 + x^2} \right) e^{-\beta \sqrt{\gamma^2 + x^2}} \cos(bx) dx &= \frac{1}{\beta \gamma} \sqrt{\beta^2 + b^2} K_1(\gamma \sqrt{\beta^2 + b^2}) \\ \int_0^\infty K_0(\alpha \sqrt{x^2 + \beta^2}) \cos(\gamma x) dx &= \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} e^{-\beta \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \gamma > 0 \\ \int_0^\infty (x^2 + b^2)^{\mp \frac{\nu}{2}} K_\nu(\alpha \sqrt{x^2 + b^2}) \cos(cx) dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{\mp \nu} b^{\frac{1}{2} \mp \nu} (\alpha^2 + c^2)^{\pm \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} K_{\pm \nu - \frac{1}{2}}(b \sqrt{\alpha^2 + c^2}) \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, c > 0 \end{aligned}$$

genutzt. Auch hier gelingt die Rücktransformation.

4.3.5.2 Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Integrale

Es sei vorausgesetzt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0, x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 dx_3 < \infty$$

gilt. Betrachtet wird das Integral

$$\begin{aligned} J(A) = & \int_{-A}^A \int_{-A}^A \int_{-A}^A \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \right\} \\ & \cdot EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3, \end{aligned}$$

wobei (x_0, x_1, x_2, x_3) ein beliebiger fest gewählter Punkt ist. Für $A \rightarrow \infty$ erhält man das obige Fourierintegral mit $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$. Es sei $0 < B < \infty$. Auf Grund der Ungleichung

$$\int_{-B}^B \int_{-B}^B \int_{-B}^B |f(x_0, x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 dx_3 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0, x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 dx_3 < \infty$$

gilt

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \int_{-A}^A \int_{-A}^A \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-B}^B \int_{-B}^B \int_{-B}^B f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \right\} \\ & \quad \cdot EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-B}^B \int_{-B}^B \int_{-B}^B f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \left\{ \int_{-A}^A \int_{-A}^A \int_{-A}^A \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} \right. \\ & \quad \left. \cdot EXP^*(0, \omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \right\} dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Für die erste Komponente des Integrals innerhalb der geschweiften Klammern auf der rechten Seite dieser Gleichung errechnet man

$$8 \left(\frac{\sin(A(y_1 - x_1))}{y_1 - x_1} \right) \left(\frac{\sin(A(y_2 - x_2))}{y_2 - x_2} \right) \left(\frac{\sin(A(y_3 - x_3))}{y_3 - x_3} \right),$$

während die letzten drei Komponenten identisch Null sind. Untersucht wird nun die linke Seite der Gleichung (4.27): Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung gilt für alle vier Komponenten

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} \right]_i dy_1 dy_2 dy_3 \right| \\ & \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^3 |f_j| dy_1 dy_2 dy_3 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\sum_{j=0}^3 f_j^2} dy_1 dy_2 dy_3 \\ & = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0, y_1, y_2, y_3)| dy_1 dy_2 dy_3, \quad i = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Somit konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3$$

gleichmäßig bezüglich $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und

$$\int_{-B}^B \int_{-B}^B \int_{-B}^B f(x_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \overline{EXP^*(0, \omega_1 y_1, \omega_2 y_2, \omega_3 y_3)} dy_1 dy_2 dy_3$$

strebt für $B \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen den Grenzwert. Folglich kann man auf der linken Seite der Gleichung (4.27) B durch ∞ ersetzen. Daraus ergibt sich für $J(A)$ die komponentenweise Darstellung

$$J_i(A) = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_0, y_1, y_2, y_3) \frac{\sin(A(y_1 - x_1))}{y_1 - x_1} \frac{\sin(A(y_2 - x_2))}{y_2 - x_2} \frac{\sin(A(y_3 - x_3))}{y_3 - x_3} dy_1 dy_2 dy_3, \quad i = 0, \dots, 3.$$

Man substituiert nun $t_j = y_j - x_j$, $j = 1, 2, 3$ und schreibt $J_i(A)$ in der Form

$$\begin{aligned} J_i(A) &= \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \right. \\ &\quad + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \\ &\quad + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \\ &\quad \left. + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \right) \\ &\quad \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned}$$

Darüber hinaus multipliziert man die Identität

$$1 = \frac{8}{\pi^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin(At_1)}{t_1} dt_1 \int_0^{\infty} \frac{\sin(At_2)}{t_2} dt_2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_3$$

mit der Konstanten S_i (dem Wert, den man für $J_i(A)$ erwartet, wenn A gegen unendlich strebt) und subtrahiert das Ergebnis von $J_i(A)$. Auf diese Weise gilt

$$J_i(A) - S_i = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_i(t_1, t_2, t_3) &= f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \\ &\quad + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \\ &\quad + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \\ &\quad + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) - 8S_i. \end{aligned}$$

Es erfolgt nun die Einschränkung auf die Fälle in welchen

1. f_i stetig in (x_0, x_1, x_2, x_3) ist: $S_i = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$

2. f_i eine Unstetigkeit erster Ordnung hat:

$$\begin{aligned} S_i = & \frac{1}{8} \left(f_i(x_0, x_1-0, x_2-0, x_3-0) + f_i(x_0, x_1-0, x_2-0, x_3+0) \right. \\ & + f_i(x_0, x_1-0, x_2+0, x_3-0) + f_i(x_0, x_1-0, x_2+0, x_3+0) \\ & + f_i(x_0, x_1+0, x_2-0, x_3-0) + f_i(x_0, x_1+0, x_2-0, x_3+0) \\ & \left. + f_i(x_0, x_1+0, x_2+0, x_3-0) + f_i(x_0, x_1+0, x_2+0, x_3+0) \right). \end{aligned}$$

Da im ersten Fall gilt

$$\lim_{t_1, t_2, t_3 \rightarrow +0} f_i(x_0, x_1 \pm t_1, x_2 \pm t_2, x_3 \pm t_3) = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

und im zweiten Fall

$$\lim_{t_1, t_2, t_3 \rightarrow +0} f_i(x_0, x_1 \pm t_1, x_2 \pm t_2, x_3 \pm t_3) = f_i(x_0, x_1 \pm 0, x_2 \pm 0, x_3 \pm 0)$$

folgt $\lim_{t_1, t_2, t_3 \rightarrow +0} \varphi_i(t_1, t_2, t_3) = 0$.

Satz 4.3.1 (Konvergenzkriterium)

Das Integral $J_i(A)$ mit $i = 0, \dots, 3$ konvergiert für $A \rightarrow \infty$ an der Stelle (x_0, x_1, x_2, x_3) und nimmt dort den Wert S_i an, wenn für beliebiges $h > 0$ das Integral

$$\int_0^h \int_0^h \int_0^h \frac{|\varphi_i(t_1, t_2, t_3)|}{t_1 t_2 t_3} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (4.28)$$

konvergiert.

Beweis: Man schreibt

$$\begin{aligned} J_i(A) - S_i = & \frac{1}{\pi^3} \int_0^h \int_0^h \int_0^h \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3 \\ & + \frac{1}{\pi^3} \int \int \int_{\mathbb{R}^{3+} \setminus Q_h} \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned}$$

mit $\mathbb{R}^{3+} = \{(t_1, t_2, t_3) : t_i \geq 0\}$ und $Q_h = \{(t_1, t_2, t_3) : 0 \leq t_i \leq h\}$ und beweist im ersten Schritt, dass gilt

$$\int_0^h \int_0^h \int_0^h \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3 \rightarrow 0 \quad \text{für } A \rightarrow \infty,$$

wenn das Integral (6.28) existiert und einen endlichen Grenzwert besitzt.

Es sei $g_i(t_1, t_2, t_3) = \frac{\varphi_i(t_1, t_2, t_3)}{t_1 t_2 t_3}$. Zunächst wird angenommen, dass das Integral über $g_i(t_1, t_2, t_3)$ ein eigentliches Integral ist. Darüber hinaus unterteilt man den Würfel Q_h in n Teilwürfel Q_j , $j = 0, \dots, n-1$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^h \int_0^h \int_0^h g_i(t_1, t_2, t_3) \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} g_i(t_1, t_2, t_3) \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned}$$

Ferner wird mit m_i^j die untere Schranke aller Werte von $g_i(t_1, t_2, t_3)$ im Teilwürfel Q_j bezeichnet. Dies ermöglicht die Schreibweise

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} [g_i(t_1, t_2, t_3) - m_i^j] \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} m_i^j \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned}$$

Ist w_i^j die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke aller Werte von $g_i(t_1, t_2, t_3)$ im Teilwürfel Q_j , so folgt $g_i(t_1, t_2, t_3) - m_i^j \leq w_i^j$ und man erhält die Ungleichung

$$|I_1| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(|w_i^j| \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} dt_1 dt_2 dt_3 + |m_i^j| \left| \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right| \right).$$

Um das letzte Integral abschätzen zu können, soll mit $b - a$ die Länge jeder Seite des Teilwürfels Q_j bezeichnet werden. Man erhält

$$\left| \int_{t_1=a}^b \sin(At_1) dt_1 \int_{t_2=a}^b \sin(At_2) dt_2 \int_{t_3=a}^b \sin(At_3) dt_3 \right| = \left| \left(\frac{\cos(Aa) - \cos(Ab)}{A} \right)^3 \right| \leq \frac{8}{A^3}$$

und kann schlußfolgern

$$|I_1| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |w_i^j| C_j + \frac{8}{A^3} \sum_{j=0}^{n-1} |m_i^j| \quad \text{mit} \quad C_j = \int_{(t_1, t_2, t_3) \in Q_j} dt_1 dt_2 dt_3.$$

Man fixiert nun $\varepsilon > 0$ und wählt eine Unterteilung des Würfels Q_h in n Teilwürfel so, dass

$$\sum_{j=0}^{n-1} |w_i^j| C_j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eine Unterteilung dieser Art ist immer möglich, da vorausgesetzt wurde, dass das Integral über $g_i(t_1, t_2, t_3)$ ein eigentliches Integral ist. Mit der speziellen Wahl der Unterteilung sind alle Werte m_i^j festgelegt und man erhält für

$$A > \left(\frac{16}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{n-1} |m_i^j| \right)^{1/3}$$

die Ungleichung $|I_1| < \varepsilon$. Im weiteren wird angenommen, dass das Integral über $g_i(t_1, t_2, t_3)$ ein uneigentliches Integral ist und $g_i(t_1, t_2, t_3)$ absolut integrierbar ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll der Fall betrachtet werden, bei dem im Würfel Q_h nur ein singulärer Punkt, beispielsweise der Punkt (h, h, h) , enthalten ist. (Andererseits wird der Würfel Q_h in eine endliche Anzahl von Teilwürfeln unterteilt, so dass innerhalb jedes Teilwürfels nur ein singulärer Punkt enthalten ist und man würde die folgenden Betrachtungen für jeden dieser Teilwürfel wiederholen.) Es sei $0 < \mu < h$ und $Q_{h-\mu} = \{(t_1, t_2, t_3) : 0 \leq t_1 \leq h - \mu\}$. Man schreibt das Integral I_1 in der Form $I_1 = I_{11} + I_{12}$ mit

$$I_{11} = \int_0^{h-\mu} \int_0^{h-\mu} \int_0^{h-\mu} g_i(t_1, t_2, t_3) \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

und

$$I_{12} = \int \int \int_{Q_h \setminus Q_{h-\mu}} g_i(t_1, t_2, t_3) \sin(At_1) \sin(At_2) \sin(At_3) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Für hinreichend kleine μ ist die Ungleichung

$$|I_{12}| \leq \int \int \int_{Q_h \setminus Q_{h-\mu}} |g_i(t_1, t_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3 < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt. Betrachtet man den Würfel $Q_{h-\mu}$, dann ist das Integral über $g_i(t_1, t_2, t_3)$ ein eigentliches Integral. In diesem Fall wurde bereits bewiesen, dass I_{11} gegen Null strebt, wenn A unendlich groß wird.

Im zweiten Schritt untersucht man das Integral

$$I_2 = \frac{1}{\pi^3} \int \int \int_{\mathbb{R}^{3+} \setminus Q_h} \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3 = I_{21} - I_{22}$$

mit

$$\begin{aligned} I_{21} = & \frac{1}{\pi^3} \int \int \int_{\mathbb{R}^{3+} \setminus Q_h} \left(f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \right. \\ & \left. + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \\
& + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \Big) \\
& \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3
\end{aligned}$$

und

$$I_{22} = \frac{8 S_i}{\pi^3} \int \int \int_{\mathbb{R}^{3+} \setminus Q_h} \frac{\sin(At_1)}{t_1} \frac{\sin(At_2)}{t_2} \frac{\sin(At_3)}{t_3} dt_1 dt_2 dt_3.$$

Da $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ absolut integrierbar ist, gilt diese Eigenschaft auch für den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \left(f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \right. \\
& + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 - t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \\
& + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 - t_2, x_3 + t_3) \\
& \left. + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 - t_3) + f_i(x_0, x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3) \right) \frac{1}{t_1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{t_3},
\end{aligned}$$

wenn $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^{3+} \setminus Q_h$. In Analogie zu den obigen Ausführungen kann man (im Fall eines singulären Punktes) zeigen, dass I_{21} gegen Null strebt, wenn A unendlich groß wird. Schließlich strebt das Integral I_{22} , geschrieben in der Form

$$I_{22} = \frac{8 S_i}{\pi^3} \int \int \int_{\mathbb{R}^{3+} \setminus Q_{hA}} \frac{\sin(u_1)}{u_1} \frac{\sin(u_2)}{u_2} \frac{\sin(u_3)}{u_3} du_1 du_2 du_3,$$

mit $Q_{hA} = \{(u_1, u_2, u_3) : 0 \leq u_i \leq Ah\}$ gegen Null, wenn A beliebig groß wird und Satz 4.3.1 ist vollständig bewiesen ■

Damit sind wesentliche Eigenschaften bewiesen, die für eine Fouriertransformation von Bedeutung sind und es wird gewissermaßen eine Tür geöffnet für die Anwendung der Fouriertransformation in der Theorie der Differentialgleichungen.

Literaturverzeichnis

- [Be] Bers, L.: Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York University, Institute for Mathematics and Mechanics, III, New York, 1953.
- [BG] Bock, S.; Gürlebeck, K.: On a Spatial Generalization of the Kolosov-Muskhelishvili Formulae. Math. Mech. Appl. Sciences 32(2), 2009, 223-240.
- [BHS] Brackx, F.; Hitzer, E.; Sangwine, S.: History of Quaternion and Clifford-Fourier Transforms and Wavelets. In: Hitzer, E.; Sangwine, S.(eds): Quaternion and Clifford-Fourier Transforms and Wavelets. Trends in Mathematics, pp. xixxvii, Springer, Berlin, 2013.
- [Bo] Bock, S.: Über funktionentheoretische Methoden in der räumlichen Elastizitätstheorie. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2009.
- [BBRS] Baaske, F.; Bernstein, S.; De Ridder, H.; Sommen, F.: On solutions of a discretized heat equation in discrete Clifford analysis. J. of Difference Equations and Applications, Vol. 20,2014-Issue 2, 271-295.
- [BHR] Boor, C. ; Höllig, K. ; Riemenschneider, S.: Fundamental solutions for multivariate difference equations. Amer. J. Math. 111(1989), 403-415.
- [BDS] Brackx, F. ; Delanghe, R. ; Sommen, F.: Clifford analysis. Research notes in mathematics 76, Pitman, Boston 1982.
- [BS] Bory-Reyes, J.; Sommen, F.: A discrete Bochner-Martinelli Formula. Complex Anal. Oper. Theory (2011) 5:83.
- [Cal] Calderón, A.P.; Zygmund, A.: On singular integrals. Amer. J. Math 78 (1956), 289-309.
- [Car] Carleman, T.: Sur les systèmes aux dérivées partielles du premier ordre a deux variables. C.R.Paris 197(1933),471-474.
- [Col] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1951.

- [CFM] Cruz, J. F.; Falcão, M.I.; Malonek, H.R.: Remarks on the generation of monogenic functions, 17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, K. Gürlebeck and C. Könke (eds.), Weimar, Germany, 12–14 July 2006 Weimar, Germany, 12–14 July 2006.
- [De] Dengfeng, Lü: Multiple solutions for p- Laplacian systems with critical homogeneous nonlinearity. *Boundary Value Problems* 2012, 2012:27, 21 Seiten.
- [DS] Deeter, C.R.; Springer, G.: Discrete harmonic kernels. *J. Math. Mech.* 14(1965), 413-438.
- [D1] Duffin, R. J.: Discrete potential theory. *Duke Math. J.* 20 (1953), 233 - 251.
- [D2] Duffin, R. J.: Basic properties of discrete analytic functions. *Duke Math. J.* 23, (1956), 335–363.
- [DD] Duffin, R. J.; Duris, C. S.: A convolution product for discrete function theory. *Duke Math. J.* 31, (1964), 199–220.
- [DJ] Dutkay, D.E.; Jorgensen, P.E.T.: Spectral Theory for Discrete Laplacians. *Compl. Anal. Oper. Theory* 4 (2010), 1-38.
- [DKT] Desbrun, M.; Kanso, E.; Tong, Y.: Discrete Differential Forms for Computational Modeling. *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*, Siggraph 2006.
- [Dyn] Dynnikov, I.A.: Über eine neue Diskretisierung der komplexen Analysis. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol.6(426), 2015,63-84.
- [Fau] Faustino, N.; Kähler, U.: Fischer Decomposition for Difference Dirac Operators. *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol.17(2007) Nr.1,37-58.
- [Ell] Ell, T. A.: Quaternion-Fourier Transforms for Analysis of Two-Dimensional Linear Time-Invariant Partial Differential Systems. *Proc. of the 32nd Conf. on Decision and Control*, IEEE (1993),1830-1841.
- [Fau1] Faustino, N.: Solutions for the Klein-Gordon and Dirac Equations on the Lattice Based on Chebyshev Polynomials. *Complex Anal. Oper. Theory* (2016), 10: 379-399.
- [FKS] Faustino, N.; Kähler, U.; Sommen, F.: Discrete Dirac Operators in Clifford Analysis. *Adv. in Appl. Clifford Algebras* 17(3), 451-467.

- [FM] Falcão, M.I.; Malonek, H.R.: Generalized exponentials through Appell sets in \mathbb{R}^{n+1} and Bessel functions. Numerical Analysis and Applied Mathematics, T. Simos, G. Psihoyios and Ch. Tsitouras (eds.) International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Corfu, Greece 16-20.9.2007, p.738–741.
- [Fe] Ferrand, J.: Fonctions préharmonique et fonctions préholomorphes. Bulletin des Sciences Mathématique sec. series 68(1944),152-180.
- [FGHK] Faustino, N.; Gürlebeck, K.; Hommel, A.; Kähler, U.: Difference potentials for the Navier-Stokes equations in unbounded domains. Journal of Difference Equations and Applications 12(2006)6, 577-596.
- [Fue1] Fueter, R.: Analytische Theorie einer Quaternionenvariablen, Comment. Math. Helv. 4 (1932), 9-20.
- [Fue2] Fueter, R.: Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comm. Math. Helv. 7 (1935), 307–330.
- [Fue3] Fueter, R.: Reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen, Vorlesungsausarbeitung, Math. Inst. Universität Zürich, 1940.
- [Gor] Goursat, E.: Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$. Bulletin de la Société Mathématique de France 26, 1898, 236.
- [GH1] Gürlebeck, K. ; Hommel, A.: A Discrete Analogue of the Complex T-Operator and a Proof of the Discrete Borel-Pompeiu Formula. Preprint 1-2003, Professur Angewandte Mathematik der Bauhaus-Universität Weimar.
- [GH2] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: Finite Difference Cauchy-Riemann Operators and Their Fundamental Solutions in the Complex Case. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 142, 101-115.
- [GH3] Gürlebeck, K. ; Hommel, A.: On Finite Difference Potentials and their Applications in a Discrete Function Theory. Math. Meth. Appl. Sci.25(2002) Issue 16-18 (Special Issue Clifford analysis in applications), 1563-1576.
- [GH4] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: On Finite Difference Dirac Operators and Their Fundamental Solutions. Advances in Applied Clifford Algebras 11(S2), (2001),89-106.
- [GH5] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: On Discrete Stokes and Navier Stokes Equations in the Plane. Clifford Algebras: Application to Mathematics, Physics and Engineering. Rafal Ablamowicz Ed., Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser, Boston,2003, 35-58.

- [GH6] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: On the Solution of Discrete Vekua Equations. Computational Methods and Function Theory. vol.5(2005), No 1, 89-110.
- [GH7] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: Diskrete Vekua equations with constant coefficients in the complex and quaternionic case. Bull. Belg. Math. Soc. 11(2004), 689-703.
- [GH8] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: Discrete Beltrami equations and a solution of the discrete Lamé system. Proceedings of the 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Weimar 2011, 9 pages.
- [GH9] Gürlebeck, K.; Hommel, A.: Finite Difference Approximations of the Cauchy-Riemann Operators and the Solution of Discrete Stokes and Navier-Stokes Problems in the Plane. Proceedings 16th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, ISSN 1611-4085, 7 pages.
- [GHS] Gürlebeck, K.; Habetha, K.; Sprössig, W.: Funktionentheorie in der Ebene und im Raum. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [GM] Gürlebeck, K. ; Malonek, H.R.: A hypercomplex derivative of monogenic functions in \mathbb{R}^{n+1} and its applications. Complex Variables 39 (1999) 199–228.
- [GN1] Gürlebeck, N.: On generating holomorphic functions in Clifford analysis - Weierstrass approach, functional equations and more, Bachelor Thesis, Jena, 2007.
- [GS1] Gürlebeck, K.; Sprößig, W.: Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. ISNM 89, Birkhäuser Verlag Basel 1990.
- [GS2] Gürlebeck, K.; Sprößig, W.: Quaternionic and Clifford calculus for Engineers and Physicists. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [HW] Hartwig, K.-H.; Weinelt, W.: Numerische Lösung linearer elliptischer Variationsungleichungen mittels FDM. Wissenschaftliche Schriftenreihe der TH Karl-Marx-Stadt 1985.
- [Hay] Hayabara, S.: Operational calculus on the discrete analytic functions. Math. Japon. 11(1966), 35-65.
- [Hi] Hitzer, E.M.S.: Quaternion Fourier Transform on Quaternion Fields and Generalizations. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 17, Issue 3, 2007, 497-517.

- [Ho] Hommel, A.: Fundamentallösungen partieller Differenzenoperatoren und die Lösung diskreter Randwertprobleme mit Hilfe von Differenzenpotentialen. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 1998.
- [Ho1] Hommel, A.: Construction of a right inverse operator to the discrete Cauchy-Riemann operator. Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress, World Scientific New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, Vol. 1, 367-374.
- [Ho2] Hommel, A.: A Discrete Theorem of Goursat. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 24, Issue 4, 2014, 1039-1045.
- [Hoe] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983.
- [I1] Isaacs, R.P.: Monodiffric functions. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 18(1952), 257-266.
- [I2] Isaacs, R.P.: A finite difference function theory. Universidad Nacional Tucumán, Revista 2(1941), 177-201.
- [JS] Jank, G.; Sommen, F.: Clifford Analysis, biaxial symmetry and pseudoanalytic functions. Complex Variables, Theory and Applications 13 (1990), 195-212.
- [Ki] Kiselman, C.: Functions on discrete sets holomorphic in the sense of Ferrand, or monodiffric functions of the second kind. Science in China Series A: Mathematics, 2008, Vol 51, Issue 4, 604-619.
- [KK] Ku, M.; Kähler, U.: Numerical Null-Solutions to Iterated Dirac Operator in Bounded Domains. Complex Anal. Oper. Theory, 2016: DOI 10.1007/s11785-016-0544-5.
- [Kol1] Kolosov, G.W.: Über eine Anwendung der Theorie der Funktion einer komplexen Veränderlichen auf das ebene Problem der mathematischen Elastizitätstheorie. (Russian), Ph. D. Thesis, Yuriew (Dorpat) 1909.
- [Kol2] Kolosov, G.W.: Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik 62, 1914, 383-409.
- [Kr1] Kravchenko, V.: Applied Pseudoanalytic Function Theory. Birkhäuser, Basel, 2009.
- [Kr2] Kravchenko, V.: On a relation of pseudoanalytic function theory in the two-dimensional stationary Schrödinger equation and Taylor series in formal powers for its solutions. Journal of Physics A: Mathematical and General 38(18), 3947.

- [Le] Leinartas, E.K.: Multiple Laurent Series and Fundamental Solutions of linear Difference Equations. Siberian Mathematical Journal, Vol 48, No 2, 268-272, 2007.
- [Lou] Lounesto, P.; Bergh, P.: Axially symmetric vector fields and their complex potentials. Complex Variables, Theory and Applications 2 (1983), 139–150
- [Ma] Marinov, M. S.: On the S-regular functions. J. Nat. Geometry 7 (1995), 21–44.
- [Mel] Meleshko, V.V.: Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. Journal of Applied Mechanics 56(1), 2003, 33–85.
- [Mer1] Mercat, C.: Discrete Polynomials and Discrete Holomorphic Approximation. arXiv preprint math-ph/0206041.
- [Mer2] Mercat, C.: Exponentials form a basis of discrete holomorphic functions. Bulletin de la Société mathématique de France 132(2), 305–326.
- [MR] Martinsson, P-G.; Rodin, G.J.: Boundary algebraic equations for lattice problems. Proc. R. Soc. A(2009), 465, 2489–2503.
- [MS] Mitelman, I. M.; Shapiro, M.V.: Differentiation of the Martinelli-Bochner Integrals and the Notion of Hyperderivability. Math. Nachr. 172 (1995) 211 – 238.
- [Mus] Muskhelishvili, N. I.: Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1971.
- [Neu] Neuber, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie; der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel. Zeitschrift für Angewandte Mathematik in der Mechanik 14, 1934, 203–212.
- [Pap] Papkovic, P.: Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par un vecteur et un scalaire harmonique (Russian), Bull. Acad. Sc. Leningrad, 1932, 1425–1435.
- [PRo] Przeworska-Rolewicz, D.: Algebraic Analysis. D. Reidel Publishing Company Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, 1988.
- [RSKS] De Ridder, H.; De Schepper, H.; Kähler, U.; Sommen, F.: Discrete function theory based on skew Weyl relations. Proc. Am. Math. Soc. 138, No 9, 3241–3256(2010).
- [Ronn] Rönn, S.: Bicomplex algebra and function theory, arXiv:math.CV/0101200 v1, 2001.

- [RT] Ryabenkij, V.S.; Tsynkov, S.V.: An Application of the difference potentials method to solving external problems in CFD. Hafez and K. Oshima eds. World Scientific, Singapore 169205, 1998.
- [RTo] Ryabenkij, V.S.; Torgashov, V.A.: The method of difference potentials for the numerical solution of an interior problem on plane flow of a viscous incompressible fluid. Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol 50(1995), No I.
- [Rya] Ryabenkij, V. S.: The Method of difference potentials for some problems of continuum mechanics (Russian). Moscow, Nauka 1987.
- [Sam] Samarskij, A.A.: Theorie der Differenzenverfahren. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, K.-G., Leipzig 1984.
- [Sce] Sce, M.: Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici. Atti Acc. Lincei Rend. fis. 23 (1957), 220–225.
- [So1] Sobolev, S. L.: Über die Eindeutigkeit der Lösung von Differenzengleichungen des elliptischen Typs. Doklady Akad. Nauk SSSR 87(1952), No.2, 179-182 (russ).
- [So2] Sobolev, S. L.: Über eine Differenzengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR 87(1952), No.3, 341-343 (russ.)
- [Som1] Sommen, F.: A product and an exponential function in hypercomplex function theory. Appl. Anal. 12(1981), 13-26.
- [Som2] Sommen, F.: Special functions in Clifford Analysis and axial symmetry, J. Math. Anal. Appl. 130 (1988), 100–133.
- [Spr1] Sprößig, W.: On operators and elementary functions in Clifford analysis. Z. Anal. Anwend. 18, No.2, 349-360 (1999).
- [St] Stummel, F.: Elliptische Differenzenoperatoren unter Dirichletrandbedingungen. Math. Z. 97 (1967), 169 - 211.
- [STDM] Stern, A.; Tong, Y.; Desbrun, M.; Marsden, J.: Geometric computational electrodynamics with variational integrators and discrete differential forms. arXiv: 0707.4470v3, math. NA 27, Mai 2009.
- [Sud] Sudbery, A.: Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* 85 (1979) 199–225.
- [Ta] Tasche, M.: Funktionalanalytische Methoden in der Operatorenrechnung. Nova Acta Leopoldina (N.F.), Nr 231, Bd 49(1978).
- [Th] Thomée, V.: Discrete interior Schauder estimates for elliptic difference operators. SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968), 626-645.

- [Tri] Tricomi, F.: Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio. Math. Zeitschrift 27(1928), 87-133.
- [Vek] Vekua, I.N.: Generalized Analytic Functions. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Vol. 25, Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press 1962; Reading, Mass.-London: Addison-Wesley Publ. Co., Inc. XXVI, 1962.
- [Wla] Wladimirow, W.S.: Gleichungen der mathematischen Physik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [Zei] Zeilberger, D.: A new approach to the theory of discrete analytic functions. Math. Anal. Appl. 57(1977), 350-367.
- [Zei1] Zeilberger, D.: Partial Difference Equations in $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0$ and Their Applications to Combinatorics. Discrete Mathematics 31, 1980, 65-77.
- [Zei2] Zeilberger, D.: The Algebra of Linear Partial Difference Operators and its Applications. SIAM J. Math. Anal., Vol 11, No 6, 1980.
- [ZeiD] Zeilberger, D.; Dym, H.: Properties of Discrete Analytic Functions. J. of Math. Anal. and Applic. 58, 1977, 405-418.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass mir die Habilitätsordnung der Bauhaus-Universität Weimar vom 10. September 2010 bekannt ist.

Ferner erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Neben dem Mentor der Arbeit, Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Gürlebeck, waren keine weiteren Personen an der inhaltlich-materiellen Erstellung der Arbeit beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Arbeit stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ich versichere, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Chemnitz, den 10.11.2017

Angela Hommel